Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

Analyse
Suites Numériques et Fonctions

Licence fondamentale 1ière année

SMI/SMA

A. U. 2020-2021

Pr. Naoual Mrhardy

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres réels

Sommaire

1 Introduction

Ce chapitre est indispensable à la bonne compréhension du cours, car $\mathbb{R}$ est d'une part l'espace fondamental de l'analyse et d'autre part se trouve être le modèle sur lequel les différentes notions du cours seront testées.

1.1 Rappels sur les ensembles

Nous supposerons connues les ensembles suivants, tous munis d'une addition, d'une multiplication, et d'une relation d'ordre $\leq$ compatibles entre elles.

- L'ensemble des entiers **naturels**, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Il vérifie le principe de récurrence, qu'on peut formuler de la manière suivante : Soit $\mathcal{P}(n)$ un énoncé dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et ayant un sens pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ (souvent $n_0 = 0$ ou 1). La démonstration par récurrence de $\mathcal{P}(n)$ comporte 2 étapes :
  (i) On montre d'abord que le résultat est vrai pour $n = n_0$.
  (ii) On démontre ensuite, en admettant que le résultat est vrai pour $n \geq n_0$, qu'il reste vrai pour $n + 1$. On montre donc l'implication

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \quad \forall n \geq n_0.$$

- L'ensemble des entiers **relatifs** $\mathbb{Z}$, union de $\mathbb{N}$ et des opposés des entiers non nuls : $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ introduit pour permettre la résolution de l'équation :

$$x + n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- L'ensemble des nombres **rationnels** $\mathbb{Q}$ définie par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

  introduit pour la résolution de l'équation

$$qx + p = 0, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

Remarque 1.1. *Tout rationnel peut s'écrire de manière unique sous forme de fraction* ***irréductible****, c'est-à-dire sous la forme*

$$\frac{p}{q}, \quad \textit{avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \quad \textit{et avec } p \textit{ et } q \textit{ premiers entre eux } (p \wedge q = 1).$$

On rappelle que $\mathbb{Q}$ comprend $\mathbb{Z}$ et forme un corps pour l'addition et la multiplication, opérations qui étendent celles de $\mathbb{Z}$. En particulier on a les règles de calcul suivantes, si $\frac{p}{q}$ et $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ on a

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{qa + pb}{qb} \quad et \quad \frac{p}{q}\frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$$

L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans $\mathbb{Q}$, on vérifie que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif (cf. cours algébre).

1.2 Insuffisance de Q.

Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs. En effet, il existe des longueurs dans le plan ne correspondant à aucun nombre rationnel. Par exemple, peut-on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à résoudre l'équation,

$$x^2 = 2.$$

$\mathbb{Q}$ s'est révélé insuffisant, puisqu'a été démontré qu'il n'existait pas de nombre rationnel x solution de cet équation.

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, noté $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels ,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$$

Parmi les irrationnels on distingue les algébriques, qui sont les racines des polynômes à coefficient entiers (par exemple $\sqrt{2}$ qui est racine de $x^2 - 2$), et les autres qu'on appelle les transcendants (exemples classiques : π et e).

Exercice 1. *Démontrer par l'absurde que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

Solution. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ avec $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et supposons que la fraction est sous une écriture irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux. En élevant au carrée, on obtient

$$2q^2 = p^2$$

L'entier p^2 est donc pair ce qui signifie que p l'est aussi (à vérifier). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$ et alors on a

$$2q^2 = p^2 = 4p'^2$$

Cela donne $q^2 = 2p'^2$ ce qui montre que q est également pair. Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.$\blacksquare$

1.3 Le corps des nombres réels

Proposition 1.1. *On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ (qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$), et d'une relation binaire $\leq$ telles que :*

1. *$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0.*
2. *$(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe commutatif de neutre 1.*
3. *La loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.*
4. *Tout réel non nul possède un unique "inverse"*
5. *$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.2.
- *Les quatres premiers points résument les règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$. Pour plus de détails sur la notion de groupe et du corps, voir le cours d'algèbre.*
- *On résume les 5 propiétés précédentes en disant que :*

$$(\mathbb{R}, +, \times) \textbf{\textit{ est un corps commutatif totalement ordonné.}}$$

Notations : On note

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ et } x \neq y$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad \textbf{l'ensemble des réels non nuls.}$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R} |\ x < 0\}$$

1.4 Intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ jouent un rôle fondamental dans l'étude des fonctions numériques (fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), tant du point de vue global (ensemble de définition) que local (voisinage).

On définit les ensembles suivants dits intervalles de $\mathbb{R}$

- L'ensemble vide $\emptyset$. (par convention)
- **Intervalles bornés :** (On désigne par a et b des réels $a < b$)
  - Intervalles ouverts bornés : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
  - Intervalles semi-ouverts bornés : $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
  - Intervalles fermés bornés ou segment d'extrémités a et b : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalles non bornés :** (On désigne par a et b des réels)
  - Intervalles fermés non bornés
    - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
    - $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
  - Intervalles ouverts non bornés :

- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit* I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$*, On dit que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *si et seulement si tout réel compris entre deux éléments de* I *est lui-même élément de* I*, c'est à dire :*

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in \mathrm{I}.$$

(le segment qui joint deux points de I *est contenu dans* I*)*

Proposition 1.2. ***Caractérisation des intervalles***
Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$*, I est un intervalle si et seulement si*

$$\forall x, y \in \mathrm{I},\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in \mathrm{I}.$$

Remarque 1.3. *Cette propriété s'appelle la convexité, autrement dit les parties convexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Démonstration. Exercice.
Exemples - $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2}$. $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1. *On a les propriétés suivantes :*
- *L'intersection de deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
- *La réunion de deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *non disjoints ($I \cap J \neq \emptyset$) est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Démonstration.
- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, posons $K = I \cap J$. Si K est vide, alors c'est un intervalle. Si K n'est pas vide, alors soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Comme I est un intervalle contenant x et y, I contient z, de même J contient z, finalement $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Supposons I et J non disjoints et soit $K = I \cup J$. K est non vide, soit $x, y \in K$ et soit z un réel tel que $x \leq z \leq y$. Si x et y sont dans I, alors z est dans I et donc dans K, de même si x et y sont dans J. Si x est dans I et y dans J, soit $t \in I \cap J$, si $z \leq t$, alors z est compris entre x et t qui sont éléments de I, donc $z \in I$. Si $t \leq z$, alors z est compris entre t et y qui sont éléments de J, donc z est élément de J. Dans les deux cas on a bien $z \in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

1.5 Voisinages

Définition 1.2. *Soit x un réel. Une partie V de* $\mathbb{R}$ *est dite voisinage de x si et seulement si*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < x < \beta \text{ tel que }]\alpha, \beta[\subset V$$

De façon équivalente une partie V est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.

Notation : On note $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $+\infty$.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, B[$ $(B \in \mathbb{R})$ est appelé voisinage de $-\infty$.*

Proposition 1.3. *On a les propriétés suivantes :*
- *Tout intervalle ouvert contenant x est un voisinage de x.*
- *Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de x est un voisinage de x.*

1.6 La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.4. *On appelle droite numérique achevée et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\bigcup\{-\infty, +\infty\}$, obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et régis par les lois suivantes :*
- *Prolongement de l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty$*
- *Prolongement de l'addition : Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

- *Prolongement de la multiplication : $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$ et pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$:*

$$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & si\ x > 0 \\ -\infty & si\ x < 0 \end{cases} \quad et\ x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & si\ x > 0 \\ +\infty & si\ x < 0 \end{cases}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini $0 \times (\pm\infty)$ ni $(-\infty) + (+\infty)$. Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans le chapitre sur les limites.

2 Caractérisation de $\mathbb{R}$ par la propriété de la borne supérieure

2.1 Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que*
- *M est un majorant de A (ou A est majorée par M) si $\forall x \in A, \quad x \leq M$.*
- *m est un minorant de A (ou A est minorée par m) si $\forall x \in A, \quad x \geq m$.*
- *A est bornée si elle est à la fois majoré et minoré.*

L'ensemble des majorants (resp. minorants) de A sera noté $\mathcal{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{M}(A)$).

Remarque 2.1. *Il faut garder à l'esprit que le majorant ou le minorant n'existent pas toujours, en plus on n'a pas l'unicité.*

Exemple - L'intervalle $]-\infty, 1]$ est majorée par 1 mais par tous les éléments de $[1, +\infty[$, par contre il n'est pas minoré.

2.2 Plus grand/petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient M et N des réels. On dit que*

- *M est le plus grand élément (ou maximum) de A, si*

$$\begin{cases} M \text{ majore } A \\ M \in A \end{cases}$$

- *N est le plus petit élément (ou minimum) de A, si*

$$\begin{cases} N \text{ minore } A \\ N \in A \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Comme pour le majorant et le minorant, il n'existe pas toujours de maximum ni de minimum, par contre on a l'unicité :*

Théorème 2.1. *Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, celui ci est unique. On le note alors $\max A$ (resp. $\min A$).*

Démonstration. Soient $M, M' \in \mathbb{R}$. On suppose que M et M' deux plus grands éléments de A. Alors par définition on aura

$$M \leq M' \text{ et } M' \leq M \Longrightarrow M = M' \qquad \square$$

Exemples

1. $\max[0,1] = 1$, $\min[0,1] = 0$
2. $]0,1[$ **n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.**
3. $[0,1[$ **a pour plus petit élément 0 et n'a pas de plus grand élément.**
4. **Soit** $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$. **Notons** $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ **alors** $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}^*\}$
   - A **n'a pas de plus grand élément : Supposons qu'il existe un plus grand élément** $M = maxA$. **On aurait alors** $u_n \leq M$, **pour tout** u_n **donc** $M \geq 1 - \frac{1}{n}$. **Faisant tendre** $n \longrightarrow +\infty$ **cela implique** $M \geq 1$. **D'autre part, comme** M **est le plus grand élément de** A **alors** $M \in A$. **Donc il existe** n_0 **tel que** $M = u_{n_0}$. **Mais alors** $M = 1 - \frac{1}{n_0} < 1$. **Ce qui est en contradiction avec** $M \geq 1$. **Donc** A **n'a pas de maximum.**
   - $\min A = 0$. **En effet, il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour** $n = 1$, $u_1 = 0$ **donc** $0 \in A$. **Ensuite pour tout** $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. **Ainsi** $\min A = 0$.

2.3 Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 2.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si l'ensemble des majorants de A n'est pas vide et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé borne supérieure de A et noté* $\sup(A)$. *La borne supérieure (lorsqu'elle existe) est donc le plus petit des majorants.i.e*
$$\sup(A) = \min \mathcal{M}(A)$$
2. *Si l'ensemble des minorants de A n'est pas vide et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé borne inférieure de A et noté* $\inf(A)$. *La borne inférieure (lorsqu'elle existe) est donc le plus grand des minorants. i.e*
$$\inf(A) = \max \mathfrak{M}(A)$$

Exemples -

1. $A =]0, 1]$**, l'ensemble des majorants est** $[1, +\infty[$**, celui-ci admet un plus petit élément qui est 1, donc** $\sup(A) = 1$**. L'ensemble des minorants de** A **est** $] - \infty, 0]$ **qui admet un plus grand élément : 0, donc** $\inf(A) = 0$**.**
2. $A =]1, +\infty[$**, l'ensemble des majorants est vide donc** A **n'a pas de borne supérieure. L'ensemble des minorants est** $] - \infty, 1]$**, donc** $\inf(A) = 1$.

Voici le lien entre maximum et borne supérieure (ou minimum et borne inférieure) :

Théorème 2.2. *Si A posséde un plus grand (resp. petit) élément, alors A posséde une borne supérieure (resp. inférieure), de plus*
$$\sup A = \max A \quad (resp. \inf A = \min A)$$

Démonstration. Nous devons montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des majorants de A posséde un plus petit élément-alors A possédera une borne supérieure-et qu'en fait ce plus petit élément est $\max A$, on aura donc $\sup A = \max A$. Deux chose à vérifier donc :
- que $\max A \in \mathcal{M}$: or par définition, $\max A$ majore A
- que $\max A$ minore $\mathcal{M}$: or par définition $\max A \in A$. □

Donnons des caractérisations des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, permettant de reconnaître si un réel est bien le sup ou inf d'un ensemble donné A :

Proposition 2.1. *(Caractérisation de la borne supérieure)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel. Il y a équivalence entre :

1. *α est la borne supérieure de A.*
2. $(i)\ \forall x \in A, \quad x \leq \alpha \quad et \quad (ii)\ \forall y < \alpha,\ \exists x \in A, \quad y < x \leq \alpha.$

On écrit souvent (ii) sous la forme
$$(ii)'\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$$

Où de façon équivalente

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x \in A, \ \alpha - \frac{1}{n} < x \leq \alpha$$

Exemple - Reprenons l'exemple de la partie $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$**.**
Montrons que $\sup A = 1$ **en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.**

- **(i) si** $x \in A$**, alors** $x \leq 1$ **(1 est bien un majorant de** A**) ;**
- **(ii) pour tout** $y < 1$**, il existe** $x \in A$ **tel que** $y < x$ **: en effet prenons** n **suffisamment grand tel que** $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$**. Alors on a** $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$**. Donc** $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ **convient. Par la caractérisation de la borne supérieure,** $\sup A = 1$**.**

Démonstration.

1. Montrons que $\sup A$ vérifie ces deux propriétés (i) et (ii). La borne supérieure est en particulier un majorant, donc vérifie (i). Pour (ii), fixons $y < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors y n'est pas un majorant de A. Donc il existe $x \in A$ tel que $y < x$. Autrement dit $\sup A$ vérifie également la seconde propriété.

2. Montrons que réciproquement si un nombre α vérifie ces deux propriétés, alors il s'agit de $\sup A$. La première propriété montre que α est un majorant de A. Supposons par l'absurde que α n'est pas le plus petit des majorants. Il existe donc un autre majorant y de A vérifiant $y < \alpha$. La deuxième propriété montre l'existence d'un élément x de A tel que $y < x \leq \alpha$, ce qui contredit le fait que y est un majorant de A. Cette contradiction montre donc que α est bien le plus petit des majorants de A, à savoir $\sup A$.

3. $(ii)'$ est une réécritures de (ii) , car un réel y vérifie $y < \sup A$ si et seulement si l $\sup A - y > 0$ c'est-à-dire si et seulement si on peut écrire $y = \sup A - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. □

On peut aussi donner une version pour la borne inférieure

Proposition 2.2. *(Caractérisation de la borne inférieure)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et β un nombre réel. Il y a équivalence entre :

1. *β est la borne inférieure de A.*
2. *(i) $\forall x \in A, \quad \beta \leq x$ et (ii) $\forall y > \beta, \ \exists x \in A, \quad \beta < x \leq y$.*

On écrit souvent (ii) sous la forme

$$(ii)' \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \beta \leq x < \beta + \varepsilon$$

Où de façon équivalente :

$$(ii)'' \ \forall n \geq 1, \exists x_n \in A, \ \beta \leq x_n < \beta + \frac{1}{n}$$

Démonstration. Identique à celle de la proposition précédente. □

Exemple - En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, nous allons montrer que

$$\inf \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = 0.$$

Notons $B = \left\{ \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$**. On a pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,**

$$0 \leq \frac{1}{n}$$

et donc (i) **est vérifié. Vérifions maintenant** (ii)**. Soit** $\varepsilon > 0$**. Il s'agit de trouver un** $n_0 \in \mathbb{N}^*$ **tel que**

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0}.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or l'entier $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ **vérifie cette inégalité et** (ii) **est vérifiée.**

Théorème 2.3. *(Opération sur les bornes supérieures)*
On suppose que A et B possédent chacune une borne supérieure.

(i) Si $A \subset B$ alors : $\sup A \leq \sup B$.

(ii) L'ensemble $A \bigcup B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup A \bigcup B = \max \{\sup A, \sup B\}$$

(iii) L'ensemble $A + B$ posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

(iv) Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble λA posséde une borne supérieure et de plus ;

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Démonstration.

(i) Pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $x \leq \sup B$ donc $\sup B$ majore A, d'où $\sup A \leq \sup B$.

(ii) Pour tout $x \in A \bigcup B$ si $x \in A$ alors $x \leq \sup A \leq \max \{\sup A, \sup B\}$, et de même, si $x \in B$ alors $x \leq \sup B \leq \max \{\sup A, \sup B\}$. Bref, $\max \{\sup A, \sup B\}$ majore $A \bigcup B$.
Soit $s < \max \{\sup A, \sup B\}$. Alors $s < \sup A$ où $s < \sup B$, donc s ne majore pas A ou s ne majore pas B, donc il existe $x \in A \bigcup B$ tel que $s < x$, ce qui prouve que s ne majore pas $A \bigcup B$.
Conclusion : $\max \{\sup A, \sup B\}$ est le plus petit majorant de $A \bigcup B$, donc $\sup(A \bigcup B)$ existe et vaut $\max \{\sup A, \sup B\}$.

(iii) exercice.

(iv) exercice. $\square$

2.4 Propriété de la borne supérieure

Le résultat qui suit est une propriété essentielle de l'ensemble des réelles. Directement ou non, c'est de lui que nous allons déduire tous les grands théorèmes de programme : Théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes, théorème de Bolzano weiertstrass....
Le probléme posé est simple : déterminer quelles partiers de $\mathbb{R}$ possédent une borne supérieure. Avant d'énoncer le théorème d'existence de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, montrons que la borne supérieure n'existe pas toujours.

Exercice 2. *Considérons le sous-ensemble de* $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}.$$

Montrer que A est majorée mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. On peut facilement vérifier que l'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{Q}$ est définie par

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{Q}/M > \sqrt{2}\}$$

Soit alors M un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Posons

$$M' = \frac{M^2 + 2}{2M}$$

Nous allons vérifier que M' est un autre majorant (dans $\mathbb{Q}$) et que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant.
Montrons que M' est un majorant : il suffit de voir que $M'^2 > 2$. On calcule

$$M'^2 - 2 = \frac{(M^2+2)^2}{4M^2} - 2 = \frac{M^4 - 4M^2 + 4}{4M^2} = \frac{(M^2-2)^2}{4M^2} > 0$$

car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ d'où $M^2 - 2 \neq 0$ dans $\mathbb{Q}$.
Il reste à vérifier que $M' < M$. Calculons

$$M - M' = M - \frac{M^2+2}{2M} = \frac{M^2-2}{2M} > 0$$

d'où le résultat.□

Proposition 2.3. ***(La propriété de la borne supérieure)***
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La propriété de la borne supérieure est très importante mais on peut omettre la démonstration assez technique
Démonstration. Soit E un ensemble non vide majoré de réels on va construire des intervalles emboités

$I_n = [a_n, b_n]$ tels que l'intersection contienne au plus un point (et donc exactement un point) qui sera la borne supérieure. Soit $e \in E$ et M un majorant de E, on pose $I_0 := [e, M]$. Pour construire I_1 on distingue deux cas : si $\frac{M+e}{2}$ est un majorant de E on choisit $a_1 = e$ et $b_1 = \frac{M+e}{2}$; sinon il existe dans E un élément qui est plus grand que $\frac{M+e}{2}$ et on choisit a_1 égal à cet élément et $b_1 = M$. En itérant ce procédé on obtient une suite décroissante d'intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ tels que b_n soit un majorant de E, tel que a_n soit un élément de E et tel que $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{|a_n - b_n|}{2}$ donc $|a_n - b_n| \leq \frac{(M-e)}{2^n}$. Montrons maintenant qu'il ne peut y avoir qu'un seul point dans l'ensemble $S := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et que c'est la borne supérieure. Tout d'abord soit $s, t \in S$ alors ces deux nombres appartiennent aussi à I_n donc, pour tout n on a $|s - t| \leq \frac{(M-e)}{2^n}$ donc $|s - t| = 0$ et $s = t$. Par construction la suite des a_n comme celle des b_n converge vers s. Comme tous les b_n sont des majorants de E, s est aussi un majorant de E ; comme tous les a_n sont des éléments de E, on a que s est le plus petit majorant.

Conséquence : Il en découle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.
Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par un réel m, alors l'ensemble $-A = \{-a/a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par le réel $-m$. D'après le théorème précédent, $-A$ admet une borne supérieure M et donc l'ensemble des majorants de $-A$ est $[M, +\infty[$, on en déduit que l'ensemble des minorants de A est $]-\infty, -M]$ et donc A admet une borne inférieure qui est $-M$, c'est à dire $\inf(A) = -\sup(-A)$. □

Proposition 2.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$ alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $\{+\infty\}$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure.□

3 Approximation d'un réel

3.1 Valeur absolue

Soit x un réel, les deux nombres x et $-x$ sont comparables puisque l'ordre est total, ce qui donne un sens à la définition suivante :

Définition 3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \max(x, -x)$. On a donc*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La quantité $d(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.

On tire de cette définition les conséquences immédiates suivantes valables pour tout réel :

$$|x| = |-x|, \ -|x| \leq x \leq |x|, \ et \ |x|^2 = x^2.$$

Remarque 3.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être assimilé à une droite graduée (i.e. munie d'un repère $(O, \overrightarrow{u})$, les réels sont alors les abscisses des points de cette droite. Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de cette droite, alors le réel positif $d(a,b)$ représente la distance de A à B, en particulier $|x|$ représente la distance de l'origine au point d'abscisse x.*

Le résultat suivant et son corollaire donnent les règles, très importantes, concernant la valeur absolue en relation avec un produit, une somme et une différence de réels. Ces règles nous permettrons de majorer, minorer, comparer c'est à dire de faire un travail d'analyse sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes (qui sont celles d'une norme) :*

$$\begin{aligned} &N_1 : |x| = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ &N_2 : |xy| = |x||y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &N_3 : |x+y| \leq |x| + |y| \ (\textit{inégalité triuangulaire}) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons montrer la propriété N_3 : ona

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \leq \sqrt{x^2+2|x||y|+y^2} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y|$$

On remarque qu'il y a égalité dans cette majoration si et seulement si $xy = |xy|$, c'est-à-dire lorsque x et y sont de même signe.□

Comme conséquence, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.
1. *Si $a \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$*
2. *On a l'inégalité $||x| - |y|| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

1. Par hypothèse, si $|x| \leq a$ alors : si $x \geq 0$, $x = |x| \leq a$, si $x \leq 0$, $|x| = -x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a$ d'où $-a \leq x \leq 0$. Dans tous les cas on a donc $-a \leq x \leq a$.
   Réciproquement, si $-a \leq x \leq a$, $(\Leftrightarrow -a \leq -x \leq a)$ alors : si $x \geq 0, 0 \leq x = |x| \leq a$; si $x \leq 0$, $0 \leq -x = |x| \leq a$. Dans tous les cas on a donc $|x| \leq a$ d'où le résultat d'équivalence.
2. D'après le point (1), on a $||x|-|y|| \leq |x-y| \Leftrightarrow -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$ d'où les deux inégalités à montrer : $-|x-y| \leq |x| - |y|$ et $|x| - |y| \leq |x-y|$, inégalités équivalentes à $|y| \leq |x| + |x-y|$ et $|x| \leq |y| + |x-y|$. Ces deux dernières inégalités sont vraies comme conséquence de l'inégalité triangulaire ; par exemple $|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x|$, idem avec $|x|$ en posant $|x| = |x-y+y|$.
   □

Pour compléter les règles précédentes, nous donnons maintenant deux caractérisations concernant l'égalité d'un réel avec 0, d'une part, et la relation d'ordre $\leq$ entre deux réels d'autre part. Ces caractérisations sont très pratiques car, souvent, quand on fait de l'analyse réelle, les nombres que l'on manipule sont formels et ont des propriétés connues "à ε près".

Corollaire 2. *1. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence : $a = 0 \Longleftrightarrow |a| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.*

2. Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $a \leq b \Longleftrightarrow a \leq b + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Démonstration.

1. Si $a = 0$, alors $0 = a = |a| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrons la propriété réciproque ($|a| \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$) par contraposition : si $a \neq 0$ on pose $\varepsilon_0 = \dfrac{|a|}{2} > 0$ et on a alors $|a| = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0$.
2. Si $a \leq b$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $b \leq b+\varepsilon$ d'où $a \leq b \leq b+\varepsilon$. Montrons également la propriété réciproque ($a \leq b + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b$) par contraposition : si $a > b$ (négation de $a \leq b$) alors en posant $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2}$ on a $b + \varepsilon_0 = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{b+a}{2} < \dfrac{a+a}{2} = a.\square$

Exemples - Pour deux réels a et b quelconques nous pouvons exprimer le plus grand (resp. petit) des deux, en fonction de a, b et de la valeur absolue de la différence $|a-b|$, de la façon suivante :

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|), \quad \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

3.2 Partie entière

Propriétés 1. $\mathbb{R}$ *vérifie la propriété suivante ; dite d'Archimède :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x \leq ny$$

On dit aussi que $\mathbb{R}$ ***est un corps archimèdien***.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x > ny$. Soit $A = \{ny / n \in \mathbb{N}^*\}$, A est non vide (contient y) et majoré par x, donc A admet une borne supérieure. Soit $b = \sup(A)$, on a $b - y < b$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0+1)y$ ce qui est absurde car $(n_0+1)y \in A.\square$

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 3.2. *(et définition)*
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif p, tel que :

$$p \leq x < p+1$$

p est appelé la partie entière de x et noté $E(x)$ ou parfois $[x]$.

Exemples - $E(13) = 13$, $E(3,9) = 3$, $E(-2) = -2$, **mais attention** $E(-7,4) = -8$ (**et non pas**) -7

Démonstration. **Existence.** Si $x \geq 0$, par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq n$. Soit l'ensemble K définie par

$$K = \{k \in \mathbb{N} | k \leq x\}$$

K est donc fini (car pour tout k dans K, on a $k < n$). Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = \max K$. On alors $k_{max} \leq x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$. Donc

$$k_{max} \leq x < k_{max} + 1$$

et on prend donc $E(x) = k_{max}$.

Si $x \leq 0$, l'entier $E(x)$ défini par $E(x) = \begin{cases} -E(-x) - 1 & si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -E(-x) & si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ convient.

Unicité. Si k et l sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leq x < k+1$ et $l \leq x < l+1$, on a donc $k \leq x < l+1$, donc par transitivité $k < l+1$. En échangeant les rôles de l et k, on a aussi $l < k+1$. On en conclut que $l - 1 < k < l + 1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $l-1$ et $l+1$, c'est l. Ainsi $k = l$.□

Remarque 3.2.
- *A partir de la démonstration, on peut remarquer, que $E(x)$ est le plus grand entier n tel que $n \leq x$. De même, $E(x) + 1$ est le plus petit entier m tel que $x < m$.*
- *La fonction $x \longmapsto E(x)$ est une fonction croissante, continue en tout point non entier, continue à droite en un point entier.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l' inégalité suivante, très utile en pratique*

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

3.3 Application : Approximations décimales

Parmi les rationnels, les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels.

Définition 3.2. *Un réel d est un nombre décimal s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n d \in \mathbb{Z}$*

Définition 3.3. *Soient x, ε deux réels avec $\varepsilon > 0$.*
- *On appelle* ***valeur décimal approchée de*** x ***à*** ε ***près par défaut*** *l'unique décimal d tel que $d \leq x < d + \varepsilon$.*
- *On appelle* ***valeur décimal approchée de*** x ***à*** ε ***près par excès*** *l'unique décimal d tel que $d - \varepsilon \leq x \leq d$.*

Proposition 3.3. *Soit x un réel. Pour tout n un entier naturel il existe un unique entier q_n tel que*

$$\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n + 1}{10^n}$$

$\frac{q_n}{10^n}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par défaut.*

Démonstration. On a :
$$E(x10^n) \leq x10^n < E(x10^n) + 1$$
d'où
$$\frac{E(x10^n)}{10^n} \leq x < \frac{E(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}$$
donc $d_1 = E(x10^n)10^{-n}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par défaut, et $d_2 = \dfrac{E(x10^n)}{10^n} + 10^{-n}$ un nombre décimal approchant x à 10^{-n} près par excès. $\square$

3.4 Densité des rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$

Nous avons vu que l'ensemble des nombres rationnels est contenu dans l'ensemble des réels. Nous allons montrer que tout nombre réel peut être approché d'aussi près que l'on veut par un rationnel (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) et que pour tout rationnel il existe un irrationnel aussi près que l'on veut de celui-ci.

Définition 3.4. (densité) *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists d \in D;\ x < d < y$$
Voici une autre définition équivalente (et très utile) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists d \in D, \quad |x - d| < \varepsilon$$

Théorème 3.1. *Soit D une partie dense dans $\mathbb{R}$, x et y deux réels teld que $x < y$. Il existe une infinité d'éléments de D entre x et y.*

Démonstration. Soit $I = \{d \in D,\ x < d < y\}$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$, I est non vide. Supposons que I est fini. Il existe, alors un entier $n > 0$ tel que $I = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.
On pourrait les classer par ordre croissant : $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$; l'intervalle $]x, d_1[$ ne contiendrait aucun élément de D, ce qui contredirait le théorème précédent.

Théorème 3.2. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Il suffit de trouver un rationnel $\dfrac{p}{q}$ tel que
$$a < \frac{p}{q} < b.$$
Soit $y = b - a > 0$ et $x = 1$. D'apès la propriété d'Archimède, il existe un entier q tel que
$$q(b - a) > 1 \quad \Longrightarrow \quad qa + 1 < qb.$$
Soit $p = [qa] + 1$. On a alors
$$qa < p \leq qa + 1 < qb.$$

En divisant par q on a le résultat désiré.

Théorème 3.3. *L'ensemble des nombres irrationnels* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. TD.

Chapitre 2

Les suites numériques

Sommaire

1 Généralités sur les suites

1.1 Définitions

Définition 1.1. *Une suite dans* $\mathbb{R}$ *est une application*

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui associe à tout entier $n \geq n_0$ *un réel* $u(n)$ *que l'on notera* u_n *plutôt que* $u(n)$*. Une telle suite sera notée* $(u_n)_{n \geq n_0}$*,* u_n *est appelé le terme général de la suite et* u_{n_0} *le premier terme.*

Exemple - Une suite peut être définie :

1. **Sous forme explicite. Par exemple, la suite de terme général**

$$u_n = \frac{9n - 20}{n^2}, \quad \textbf{pour tout} \quad n \geq 1.$$

   c'est une suite dont les premiers termes sont

$$u_1 = -11; u_2 = -\frac{1}{2}; u_3 = \frac{7}{9}; u_4 = 1; u_5 = 1; ....$$

2. **Sous forme récurrentes. Par exemple, la suite définie par**

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

   Ainsi, $u_2 = \frac{4}{3}$ **et** $u_2 = \frac{8}{7}$**.**

1.2 Suites monotones

Définition 1.2. *1. Une suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite croissante (resp. décroissante) si pour tout* $n \geq n_0$*,* $u_n \leq u_{n+1}$ *(resp.* $n \geq n_0$*,* $u_n \geq u_{n+1}$*).*

2. Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout* $n \geq n_0$*,* $u_n < u_{n+1}$ *(resp.* $n \geq n_0$*,* $u_n > u_{n+1}$*).*

3. Une suite est dite monotone si elle est soit croissante, soit décroissante,

4. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq p, u_n = u_p$*,* (u_n) *est dite stationnaire à partir du rang p.*

Remarque 1.1. *Le sens de variation d'une suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *peut être étudier de deux façon :*

1. *La suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est croissante (respectivement. décroissante) si et seulement si* $u_{n+1} - u_n \geq 0$ *(respectivement* $u_{n+1} - u_n \leq 0$*)*
2. *Si la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est strictement positive c'est-à-dire* $\forall n,\ u_n > 0$ *alors*
   - *La suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est croissante si et seulement si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *.*
   - *La suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est décroissante si et seulement si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$*.*

Exemple -

1. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est une suite strictement décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a**
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$
2. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.**

1.3 Suites bornées

Définition 1.3. *1. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$).*

2. Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $m \leq u_n \leq M$.

En pratique il est plus facile d'utiliser la caractérisation ci-dessous pour montrer qu'une suite est bornée.

Remarque 1.2. *Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif A tel que l'on ait*
$$\forall n; \quad |u_n| \leq A$$

Exemple -

1. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq 1$.**
2. **La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ avec $u_n = 2^n$ est croissante mais n'est pas majorée.**
3. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est bornée mais n'est pas monotone.**

2 Nature d'une suite

2.1 Suites convergentes et suites divergentes

Définition 2.1. (Suite convergente) *On dit que la suite de nombres réelles $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout voisinage V de ℓ, u_n appartienne à V à partir d'un certain rang . Cela est équivalent à dire*
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \leq n_0 \;\; \textit{tel que}: \;\forall n > N_\varepsilon \;\; |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1}$$
On note alors
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell.$$
L'équivalence suivante est évidente :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0. \tag{2.2}$$

Exemple - La suite définie par $u_n = \dfrac{9n-20}{n^2}$ converge vers 0. En effet soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$|u_n - 0| = \left|\frac{9n-20}{n^2}\right| < \frac{9}{n} < \varepsilon$$

dés que $n > \dfrac{9}{\varepsilon}$. Il suffit donc de prendre

$$N = \left[\frac{9}{\varepsilon}\right] + 1$$

on a $N > \dfrac{9}{\varepsilon}$ et ainsi $\dfrac{9}{N} < \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{9}{n} < \dfrac{9}{N} < \varepsilon$. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{9n-20}{n^2} = 0.$$

Proposition 2.1. *On peut utiliser une inégalité large dans la définition de convergence. Une suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \geq n_0 \ \ \textit{tel que}: \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Démonstration. $\Rightarrow$ est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.
$\Leftarrow$ soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$ et à partir de ce rang, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon' < \varepsilon$. $\square$

Si le réel ℓ n'existe pas, la suite est dite divergente. Avec les quantificateurs on écrit,

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \ \exists \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \exists n \geq N, \ \textit{et} \ |u_n - l| \geq \varepsilon$$

Une suite peut diverger tout en tendant vers $\pm\infty$.

Définition 2.2. (Suite divergente)

1. *On dira que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ et on notera $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \geq n_0 \ \textit{tel que} \ \forall n \geq N, u_n > A.$$

2. *On dira que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et on notera $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si*

$$\forall B \in \mathbb{R}, \ \exists N \geq n_0 \ \textit{tel que} \ \forall n \geq N, u_n < B.$$

Remarque 2.1. 1. *On obtient une définition équivalente en remplaçant "$\forall A \in \mathbb{R}$" par "$\forall A \in \mathbb{R}^+$".*

2. *On obtient une définition équivalente en remplaçant "$\forall B \in \mathbb{R}$" par "$\forall B \in \mathbb{R}^-$".*

Exemple -

1. **La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$ diverge vers $+\infty$. En effet, pour tout $A \in \mathbb{R}$, prenons $N = [A] + 1$. On a, $N > A$ et donc pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.**

2. **La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente. En effet, supposons qu'elle est convergente, alors :**
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*\ \textbf{tel que}:\ \forall n > N_\varepsilon\ \ |(-1)^n - \ell| < \varepsilon.$$
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, cela donne :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*\ \textbf{tel que}:\ \forall n > N_\varepsilon\ \ \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2}.$$
Pour un entier pair tel que $n > N$, on a $\ell - \dfrac{1}{2} < 1 < \ell + \dfrac{1}{2}$.
Donc $\ell \in \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$
Pour un entier impair tel que $n > N$, on a $\ell - \dfrac{1}{2} < -1 < \ell + \dfrac{1}{2}$.
Donc $l \in \left]-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right[$.
Ce qui est absurde.

2.2 Propriétés de convergence des suites

Théorème 2.1. *(Unicité de la limite)*
Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite alors cette limite est unique.

Démonstration. Raisonnons par absurde et supposons que $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers deux limite ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

Prenons $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{4}$. Puisque la suite converge vers ℓ_1 et ℓ_2, il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tel que
$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon, \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2, |u_n - \ell_2| < \varepsilon. \tag{$*$}$$
Choisissons un entier n tel que $n > N = \max(N_1, N_2)$. Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et $(*)$,
$$0 < |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| < 2\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}.$$
On abouti donc à une contradiction ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Proposition 2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe donc un entier $N \geq n_0$ tel que
$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| < 1. \tag{$*$}$$
Notons $M_1 = max\{|u_{n_0}|, \ldots, |u_{N-1}|\}$, $M_2 = |l| + 1$ et $M = max(M_1, M_2)$. Pour tout $n \geq n_0$, on a deux cas :

- Si $n_0 \leq n \leq N - 1$, on a
$$|u_n| \leq M_1 \leq M,$$

- si $n \geq N$, on a d'après $(*)$ et l'inégalité triangulaire,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| \leq M.$$

Nous avons donc montré que

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$$

ce qui montre que la suite est bornée. ■

Exemple - La suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ **est convergente vers 0 donc elle est bornée et l'on a bien** $0 < u_n \leq 1$. **Mais, la réciproque est fausse. Pour le voir, considérons la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ **définie par** $u_n = (-1)^n$ **est bornée (**$|u_n| \leq 1$**) mais n'est pas convergente.**

2.3 Opérations algébriques sur les suites convergentes

Proposition 2.3. *Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites réelles telles que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Alors, on a :

1. *La suite somme* $(u_n + v_n)_n$ *est convergente, de plus on a* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.
2. *La suite produit* $(u_n v_n)_n$ *est convergente, de plus on a* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n) = \ell_1\ell_2$. *En particulier pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(au_n) = a\ell_1$.
3. *Si pour tout* $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ *et* $\ell_2 \neq 0$, *alors* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell_2}$.
4. *Si pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ *(respectivement* $u_n < v_n$*), alors* $\ell_1 \leq \ell_2$.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n > N_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n > N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$P1$}$$

   Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient, d'après l'inégalité triangulaire et $(P1)$,

$$\forall n > N,\ |u_n + v_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Commençons par remarquer que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$u_n v_n - \ell_1\ell_2 = (u_n - \ell_1)v_n + (v_n - \ell_2)\ell_1, \tag{$P2$}$$

   et que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$, étant convergente, elle est bornée en vertu de la Proposition 2.2. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |v_n| \leq M. \tag{$P3$}$$

Maintenant, il existe deux entiers $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n > N_1,\ |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \forall n > N_2,\ |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}. \tag{P4}$$

Prenons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient d'après l'inégalité triangulaire, $(P2)$, $(P3)$ et $(P4)$,

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq |u_n - \ell_1||v_n| + |v_n - \ell_2||\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)} |\ell_1| < \varepsilon.$$

3. Puisque $\ell_2 \neq 0$, il existe un entier $N_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n > N_1$, on a $|v_n - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}$. Ceci entraine que

$$\forall n > N_1,\ |v_n| \geq \frac{|\ell_2|}{2}. \tag{P5}$$

D'un autre côté, on a, pour tout $n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|v_n - \ell_2|}{|v_n \ell_2|}. \tag{P6}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_2 \geq n_0$ tel que

$$\forall n > N_2,\ |v_n - \ell_2| < (\ell_2)^2 \frac{\varepsilon}{2}. \tag{P7}$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient, d'après $(P5)$, $(P6)$ et $(P7)$,

$$\forall n > N,\ \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \varepsilon.$$

4. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq n_0$ tel que

$$\ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ces deux doubles inégalités entraînent que

$$\ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} < u_n \leq v_n < \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc $\ell_1 < \ell_2 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et ainsi $\ell_1 \leq \ell_2$. ■

2.4 Opérations algébriques sur les suites divergentes

Proposition 2.4. *1. Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) et si $(v_n)_n$ est une suite minorée (respectivement majorée), alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).*

2. Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) et si $(v_n)_n$ est une suite qui converge vers v, alors $(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) si $v > 0$ et vers $-\infty$ (respectivement vers $+\infty$) si $v < 0$.

3. *Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) alors $\frac{1}{u_n}$ converge vers 0*

4. *Si $(u_n)_n$ tend vers 0 et $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$) alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$)*

Démonstration.

1. Soient $(u_n)_n$ une suite qui tend vers $+\infty$ et $(v_n)_n$ une suite minorée. Il existe $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \geq M_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Longrightarrow u_n > M - M_0$$

Par conséquent

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n > N \Longrightarrow u_n + v_n > M)$$

2. Soient $(u_n)_n$ une suite qui tend vers $+\infty$ et $(v_n)_n$ qui converge vers v. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_1 \Longrightarrow 0 < \frac{v}{2} < v_n < \frac{3v}{2}$$

Soit $A \in \mathbb{R}^+$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_2 \Longrightarrow u_n > \frac{2A}{v}$$

Pour $n > \max(N_1, N_2)$, nous avons bien

$$u_n v_n > A.$$

3. Etant donnée $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Longrightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Par conséquent

$$n > N \Longrightarrow \frac{1}{u_n} < \varepsilon$$

La propriété 4 est immédiate. ■

Corollaire 3. 1. *Si deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendent vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) leurs somme $(u_n+v_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

2. *Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) et si $(v_n)_n$ est une suite convergente alors leurs somme $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

3 Critères de convergence d'une suite

3.1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Théorème 3.1. (Théorème des gendarmes) *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles. On suppose que*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell.$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \geq n_0$ et $N_2 \geq n_0$ tels que

$$\forall n \geq N_1,\ \ell-\varepsilon < u_n < \varepsilon+\ell \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ \ell-\varepsilon < v_n < \varepsilon+\ell.$$

Posons $N = max(N_1, N_2)$. Il vient

$$\forall n \geq N,\ \ell-\varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \varepsilon+\ell.$$

Ceci montre que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell$. ■

Exemple -

1. **Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$. Puisque $-1 \leq \cos n \leq 1$, on déduit que**

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

   Maintenant, comme on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{n} = 0$, en appliquant le principe des gendarmes, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Le théorème des gendarmes s'étend de la manière suivante :

Corollaire 4. *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ telles que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors :*

1. *Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$.*
2. *Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration.

1. Soit $A > 0$. Puisque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Or $v_n \geq u_n$, on déduit alors que pour tout $n \geq N$, $v_n > A$ et donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$.
2. Raisonnement similaire à celui de 1. ■

Théorème 3.2. ***(Obtention de convergence)***
Si à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq v_n$ et si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$

Démonstration. On suppose qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq v_n$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n| < \varepsilon$$

et donc $v_n < \varepsilon$. Pour $N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

■

Remarque 3.1. *Cette démarche est souvent plus efficace que le théorème des gendarmes car on n'y utilise qu'une inégalité au lieu de deux, ce qui est pratique pour la multiplication d'inégalités. Cependant elle nécessite de l'intuition car pour l'initier il faut avoir deviner quelle est la limite de* (u_n).

3.2 Critère de la convergence monotone

En s'appuyant sur la propriété de la borne supérieure, on va démontrer le théorème des suites monotones bornées, qui permet de savoir si une suite est convergente sans connaître sa limite.

Théorème 3.3. (Théorème des suites monotones)

1. *Toute suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et, en plus, on a*
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} \sup\limits_{n \geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est croissante,} \\ \inf\limits_{n \geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante.} \end{cases}$$
2. *Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*).*

1. ***Démonstration***. Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante majorée et notons $\ell = \sup\limits_{n \geq n_0} u_n$ qui existe d'après le théorème de la borne supérieure.
   Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que
   $$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell.$$
   Maintenant, puisque la suite est croissante, il vient
   $$\forall n \geq N, \ \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$
   Ceci montre que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Pour une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ décroissante minorée, la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante majorée et $\sup\limits_{n\geq n_0}(-u_n) = -\inf\limits_{n\geq n_0} u_n$ et ce qui précède permet de conclure.

2. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit $A > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que $u_N > A$. Comme la suite est croissante, pour tout $n > N$, nous avons $u_n > A$. ■

Remarque 3.2. *Ce théorème dit que si une suite est croissante alors soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.*

3.3 Critère de d'Alembert

On peut maintenant introduire un critère dit de d'Alembert :

Proposition 3.1. *(Critère de d'Alembert)*
Soit (u_n) une suite réelle tel que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$$

alors on a

(i) Si $\ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.

(ii) Si $\ell > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(iii) Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

Démonstration. Montrons (i). Pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, il exite $N \geq n_0$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell + \varepsilon \Longrightarrow 0 \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{\ell+1}{2}$$

On pose $\rho = \dfrac{\ell+1}{2}$, alors on aura

$$|u_{n+1}| \leq \rho\,|u_n|$$

Par récurrence on obtient

$$|u_n| \leq \rho\,|u_{n-1}| \leq \rho(\rho\,|u_{n-2}|) < \ldots < \rho^{n-N}\,|u_N|$$

Puisque $0 < \ell < 1$ alors $0 < \rho < 1$ et donc ρ^{n-N} tend vers 0, on en déduit le résultat. La seconde partie se démontre de la même façon. ■

3.4 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure par les suites

Proposition 3.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :*

1. *$\alpha = \sup A$ si et seulement si α est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \alpha$.*
2. *$\beta = \inf A$ si et seulement si β est un minorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \beta$.*

3. *A n'est pas majoré si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = +\infty$.
4. *A n'est pas minoré si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = -\infty$.

Démonstration. Nous allons montrer la première assertion, les autres se démontrent d'une manière analogue. Nous allons démontrer une équivalence.
Supposons que $\alpha = \sup A$. D'abord α est un majorant de A par définition. D'après la caractérisation de la borne supérieur, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha.$$

Le critère de comparaison montre d'une manière évidente que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de points de A qui converge vers α.
Inversement, supposons que α est un majorant de A et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \in A$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \alpha$. Pour montrer que $\alpha = \sup A$, il suffit de montrer le $(ii)'$ de la proposition (1). En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \alpha$, il existe $N \geq n_0$ telle

$$\alpha - \varepsilon < a_N < \alpha + \varepsilon.$$

Puisque $a_N \in A$, on peux conclure. ■

Exemple -

1. **Soit** $A =]-1, +\infty[$. **On a** $\inf A = -1$ **car** -1 **est un minorant de** A **et la suite** $\left(-1 + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ **est une suite de points de** A **qui converge vers** -1.
   La partie A **n'est pas majorée car la suite** $(n)_{n\geq 0}$ **est une suite de points de** A **qui diverge vers** $+\infty$.
2. **Soit** $A =]-\infty, 3[$. **On a** $\sup A = 3$ **car** 3 **est un majorant de** A **et la suite** $\left(3 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ **est une suite de points de** A **qui converge vers** 3.
   La partie A **n'est pas minorée car La suite** $(-n)_{n\geq 0}$ **est une suite de points de** A **qui diverge vers** $-\infty$.
3. **La partie** $A = \left\{\sqrt{n} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ **n'est pas majorée car la suite** $\left(\sqrt{n} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est une suite de points de** A **qui diverge vers** $+\infty$.

3.5 Caractérisation séquentielle de la densité

Théorème 3.4. *Soit A une partie de* $\mathbb{R}$. *A est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *il existe une suite* $(a_n)_n$ *d'éléments de A telle que*

$$x = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Démonstration.

- Supposons A dense dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n > 0$, il existe $a_n \in A$ tel

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

Le critère d'encadrement, implique que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$, donc on a construit une suite d'élément de A qui converge vers x.
- Inversement, soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$. Par hypothèse, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{x+y}{2}$. Alors, pour $\varepsilon = \frac{y-x}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| a_n - \frac{x+y}{2} \right| < \frac{y-x}{2} \Longleftrightarrow x < a_n < y$$

■

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 4.1. *(Suites arithmétiques)*
Une suite $(u_n)_n$ est appelée une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que,

$$\forall n, \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r s'appelle la raison de la suite.

Propriété 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r, alors*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$u_n = u_0 + nr$$
- *D'une manière générale,*
$$u_n = u_p + (n-p)r$$
- *Si $r > 0$ la suite tend vers $+\infty$, et si $r < 0$ la suite tend vers $-\infty$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $r = 0$ (c'est une suite stationnaire).*

Proposition 4.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors la somme S_n des n premiers termes de la suite (u_n) est donnée par*

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

***Démonstration*.** On a

$$2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \ldots + (u_p + u_{n-p}) + \ldots (u_n + u_0)$$

or pour tout $p \leq n$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$$

ainsi

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Définition 4.2. *(Suites géométrique)*
Une suite $(u_n)_n$ est appelée une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que,

$$\forall n, \quad u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q s'appelle la raison de la suite. Il est immédiat qu'alors $u_n = u_0 q^n$.

Proposition 4.2. ***(Nature d'une suite géométrique)***
Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q.

- *Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0.*
- *Si $q = 1$, la suite $(u_n)_n$ converge vers u_0 (elle est stationnaire).*
- *Si $q = -1$, la suite diverge.*
- *Si $q > 1$, la suite (u_n) tend vers l'infini avec le signe de u_0.*
- *Si $|q| > 1$, la suite $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration.

- Si $q > 1$, on écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$, on en déduit par la formule de binôme que $q^n = (1+a)^n > 1 + na$. Or
$$\lim_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$
Il ne reste plus qu'à multiplier par u_0 pour conclure.
- Le même raisonement est valable si $|q| > 1$.
- Si $|q| < 1$, alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$, donc d'après ce qui précéde, $\dfrac{1}{|q^n|}$ tend vers $+\infty$, il s'ensuit que q^n tend vers 0. ■

Proposition 4.3. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors la somme S_n des n premiers termes de la suite (u_n) est donnée par*

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $|q| < 1$ alors (S_n) est une suite qui admet $\dfrac{u_0}{1-q}$ comme limite.

Démonstration. On a $S_n = u_0(1 + q + \ldots + q^n)$
En multipliant par $1 - q$, on obtient immédiatement, $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. ■

4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 4.3. *On appelle suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, toute suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par :*

$$u_0 \text{ donné}, \qquad u_{n+1} = qu_n + r.$$

A chaque étape on multiplie le terme précédent par q (comme pour une suite géométrique) puis on ajoute un nombre r (comme pour une suite arithmétique) d'où le nom. Attention ces suites ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

Propriété 2. ***(Terme général d'une suite arithmético-géométrique)***
Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors
- *Si $q = 1$, $u_n = u_0 + nr$, c'est une suite arithmétique.*
- *Si $r = 0$; $u_n = u_0 q^n$, c'est une suite géométrique*
- *Si $q \neq 1$,*
$$u_n = q^n(u_0 - a) + a \quad \text{avec} \quad a = \frac{r}{1-q}$$

Proposition 4.4. ***(Convergence d'une suite arithmético-géométrique)***
Si $(u_n)_n$ est suite arithmético-géométrique de paramètres q et r, alors

1. *Si $|q| < 1$, la suite converge vers a.*
2. *Si $|q| > 1$, la suite diverge sauf pour $u_0 = a$ (suite stationnaire $u_n = u_0$, $\forall n$).*
3. *Si $q = -1$ la suite diverge sauf pour $u_0 = a$.*

4.3 Suites récurrentes

Définition 4.4. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$u_{n+1} = f(u_n); \quad u_0 \text{ donné} \qquad (*)$$

Pour trouver la limite d'une suite récurrente, on peut citer ici deux méthodes :
- **1ère méthode :** On essaie de se ramener à une suite non-récurrente en exprimant le terme général comme une fonction de n.
- **2ème méthode :** On démontre d'abord que la limite ℓ existe puis on passe à la limite dans $(*)$ ce qui nous ramene à résoudre l'équation

$$\ell = f(\ell)$$

Donnons un exemple qui illustre ces deux méthodes :

Exemple 1. *Soit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par récurrence : $u_1 = 2$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$.*

1ère méthode : *On calcule*

$$u_2 = \frac{4}{3}, \quad u_3 = \frac{8}{7}, \quad u_4 = \frac{16}{15}, \ldots$$

On remarque que les premiers termes de la suite vérifient

$$u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

On démontre, par récurrence, que cette formule est vrai pour tout n. *Puis on calcule la limite*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n} \frac{1}{1 - 2^{-n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 2^{-n}}$$

or $\lim_{n \longrightarrow +\infty} 2^{-n} = 0$ *donc* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 1$

2ème méthode : *On montre d'abord, par récurrence, que la suite est minorée par 1 et décroissante alors elle converge vers une limite* ℓ *qui est solution de l'équation :*

$$\ell = \frac{2\ell}{1 + \ell} \Longleftrightarrow \ell(\ell - 1) = 0$$

Cette équation a 2 solutions 0 et 1. Puisque que $u_n \geq 1$ *pour tout* n *alors la limite est donc* $\ell = 1$.

Exemple 2. *On considère la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par* $u_1 = 1$ *et pour tout* $n \geq 2$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4).$$

Nous allons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 2.$$

1. *Cette relation est clairement vérifiée pour* $n = 1$: $0 < u_1 = 1 < 2$.
2. *Supposons qu'elle est vraie pour* n. *On a*

$$0 < u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4) < \frac{1}{4}(2 + 4) < 2.$$

Montrons maintenant, par récurrence, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante.*

1. *On a* $u_1 = 1 < u_2 = \frac{5}{4}$.
2. *Supposons* $u_n < u_{n+1}$. *Alors*

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_{n+1} + 4) - \frac{1}{4}(u_n + 4) = \frac{1}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est donc croissante et bornée. Etant croissante et majorée, d'après le théorème 3.3,* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente vers une limite* ℓ. *De la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 4),$$

on déduit en passant à la limite que $\ell = \frac{1}{4}(\ell + 4)$ *et on trouve que* $\ell = \frac{4}{3}$.

4.4 Suites adjacentes

Définition 4.5. *Deux suites réelles* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *sont dites adjacentes si :*

1. *la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante,*
2. *la suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante,*
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Remarque 4.1. *On alors pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

Théorème 4.1. *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite* ℓ *de plus on a* $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites adjacentes. On a

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n_0} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n_0}.$$

De cette inégalité, on déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par v_{n_0} et, puisque elle est croissante, elle converge vers un réel ℓ_1. De même, la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par u_{n_0} et, puisque elle est décroissante, elle converge vers un réel ℓ_2. De la relation $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$ on déduit que $\ell_1 = \ell_2$. ■

Exemple - Soient (u_n) **et** (v_n) **définies par :** $0 < u_0 < v_0$ **et** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. **Montrer que** (u_n) **et** (v_n) **sont adjacentes, on note par** $M(u_0, v_0)$ **leurs limite commune appelée moyenne arithmico-géométrique de** u_0 **et** v_0**. Pour établir la dernière assertion il suffit de montrer que**

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

4.5 Suites de Cauchy

Définition 4.6. *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite de Cauchy si* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour chaque* $p\ , q \geq N_\varepsilon$ *on a*

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; \forall p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon \text{ on a } \quad |u_{p+n} - u_n| < \varepsilon$$

Théorème 4.2. *On a les implications suivantes*

$$(u_n) \text{ converge} \Longrightarrow (u_n) \text{ de Cauchy} \Longrightarrow (u_n) \text{ est bornée}$$

Démonstration. **On va montrer la première implication, la deuxième est laissé en exercice.**
Soit $(u_n) \longrightarrow \ell$**. Alors pour tout** $\varepsilon > 0$, **il existe** $N = N_{\varepsilon/2}$ **avec** $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$ **si** $p > N$**. Ceci implique**

$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + (\ell - u_q)| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

dès que $p\ , q \geq N$. ■

5 Suites extraites et le théorème de BOLZANO-WIERSTRASS

5.1 Suites extraites

Définition 5.1. *On dit qu'une suite $(v_n)_n$ est une suite extraite ou une sous suite d'une suite $(u_n)_n$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

Si la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est la valeur d'adhérence.

Lemme 5.1. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$$

Démonstration. **Par récurrence :**
Si $n = 0$ alors comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a bien $\varphi(0) \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\varphi(n) \geq n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geq n+1$. Comme φ est strictement croissante, on a nécessairement $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Par conséquent $\varphi(n+1) \geq n+1$. (Si pour deux entiers x, y, on a $x > y$ alors $x \geq y+1$).
La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence. ■

Proposition 5.1. *Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite ℓ est une suite convergeant vers ℓ.*

Démonstration. **Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On suppose que $u_n \longrightarrow \ell$. Montrons que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \longrightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Soit $n > N$. D'après le lemme précédent, $\varphi(n) \geq n \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$.** ■

Remarque 5.1.
- *La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie.*
- *Cette proposition est souvent utilisé pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : En pratique, on extrait une sous suite qui diverge, ou bien deux sous suites ayant deux limites distinctes.*

Exemple - Soit $u_n = (-1)^n$, les deux sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont convergentes de limites respectives 1 et -1, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

5.2 Segments emboîtés et théorème de BOLZANO-WIERSTRASS

Etant donné deux nombres réels a et b, on désigne par $[a, b]$ l'ensemble de $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$$

l'ensemble $[a, b]$ est dit segment d'extrémités a et b. Par définition la longeur de segment $[a, b]$ est le réel $b - a$.

Corollaire 5. *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, $I_n = [a_n, b_n]$ tels que*
- *Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \subset I_n$*
- *Leur longueur tend vers 0 : $(b_n - a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Alors il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$

Démonstration. **Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ ce qui montre que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. La deuxième hypothèse montre que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons par double inclusion que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$**

- $\supset$ **Montrons que ℓ appartient à l'intersection des intervalles I_n. Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers ℓ, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ell \in I_n$ ce qui montre que $\ell \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.**
- $\subset$ **Soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Montrons que $x = \ell$. Par définition on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in I_n$ d'où**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq x \leq b_n$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que $\ell \leq x \leq \ell$ d'où $\ell = x$.■

Théorème 5.1. *(Théorème de BOLZANO-WIERSTRASS)*
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration. **Considérons une suite (u_n) bornée. Il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leq u_n \leq b_0$. Dans la suite, on dira q'une partie A de $\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite (u_n) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \geq N$; $u_p \notin A$. Dans le cas contraire, on dira que A contient un nombre infini de termes de la suite.**
Le principe de la démonstration est de construire par récurrence une suite de segments emboîtés

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \ldots \subset [a_0, b_0]$$

tels que $[a_n, b_n]$ contienne un nombre infini de termes de la suite (u_n). On construira alors une sous-suite convergente en prenant un terme de (u_n) dans chacun des segments.

- $[a_0, b_0]$ **contient tous les termes de (u_n).**
- **Posons $c_0 = \dfrac{(a_0 + b_0)}{2}$ le milieu de $[a_0, b_0]$ et $\varphi(0) = 0 = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k \in [a_0, b_0]\}$. Pour l'un au moins des segments $[a_0, c_0]$ ou $[c_0, b_0]$, il y a une infinité d'entiers n tels que u_n soit dans l'un des segments. Autrement dit, l'un de ces deux ensembles suivant est infini**

$$G_0 = \{k > \varphi(0), u_k \in [a_0, c_0]\}, \qquad D_0 = \{k > \varphi(0), u_k \in [c_0, b_0]\}$$

- **Si G_0 est infini, on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ et $\varphi(1) = \min G_0$. Sinon, on pose $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ et $\varphi(1) = \min D_0$.**
- **On recommence en posant $c_1 = \dfrac{(a_1 + b_1)}{2}$. L'un des deux ensemble suivants est infini**

$$G_1 = \{k > \varphi(1), u_k \in [a_1, c_1]\}, \quad D_1 = \{k > \varphi(1), u_k \in [c_1, b_1]\}.$$

- **Si G_0 est infini, on pose $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ et $\varphi(2) = \min G_1$. Sinon, on pose $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$ et $\varphi(2) = \min D_1$. On a**

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2), \quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \quad \text{et} \quad b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{4}$$

- **Supposons que l'on a construit une suite :** $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$ **et une application** $\varphi : n \in \mathbb{N} \longrightarrow \varphi(n) \in \mathbb{N}$ **strictement croissante :**$\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$ **tel que**

$$a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n \quad \textbf{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

On pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$**, alors l'un des deux ensembles suivant est infini :**

$$G_n = \{k > \varphi(n), u_k \in [a_n, c_n]\}, \quad D_n = \{k > \varphi(n), u_k \in [c_n, b_n]\}.$$

- **Si c'est** G_n**, on pose** $a_{n+1} = a_n$**,** $b_{n+1} = c_n$ **et** $\varphi(n+1) = \min G_n$**. Sinon, on pose** $a_{n+1} = c_n$**,** $b_{n+1} = b_n$ **et** $\varphi(n+1) = \min D_n$**.**

On a

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ldots \subset [a_0, b_0] \quad \textbf{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Les suites (a_n) **et** (b_n) **sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$**. Puisque** $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$**, d'après le théorème des gendarmes, la suite extraite** $(u_{\varphi(n)})$ **converge vers** ℓ**.**$\blacksquare$

5.3 Application : Complétude de $\mathbb{R}$

Théorème 5.2. *Une suite de nombres réels converge vers une limite finie ℓ si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.*

Démonstration. **L'implication est une suite convergente est déjà démontrée. Il nous reste à montrer qu'une suite de Cauchy converge. Soit** (u_n) **une suite de Cauchy.**
La suite (u_n) **est bornée et donc par le théorème de Bolzano-Wierstrass, elle admet une sous suite convergente** $(u_{\varphi(n)})$**. On va montrer que** (u_n) **converge vers la même limite que cette sous-suite. Comme** (u_n) **est de Cauchy, on a**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*, ((p,q)^2 \in \mathbb{N}^2, p, q \geq N_1 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

De plus, on a :

- $\forall A > 0; \exists N_2(A)$ **tel que** $\forall n \geq N_2(A) \Rightarrow \varphi(n) > A$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N_3(\varepsilon)$ **tel que** $\forall m \geq N_3(\varepsilon) \Rightarrow |u_{\varphi(m)} - \ell| < \varepsilon$

Soit alors $\varepsilon > 0$**, posons** $N(\varepsilon) = N_1(\dfrac{\varepsilon}{2})$**. Soit** m **un entier tel** $m \geq \max(N_3(\dfrac{\varepsilon}{2}), N_2(N_1(\dfrac{\varepsilon}{2}))$**, alors on aura :**

$$\forall n \geq N(\varepsilon), |u_n - \ell| < |u_n - u_{\varphi(m)}| + |u_{\varphi(m)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite (u_n) **converge vers** ℓ**.** $\blacksquare$

Exemple - La suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ **est convergente. En effet, montrons qu'elle est de Cauchy. On a**

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!}$$

or $(n+p)! \geq 2^{n+p-1}$**, donc**

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} = \frac{1}{2^n}(1 + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}})$$

d'où

$$0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^p})$$

Puisque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \frac{1}{2^p}) = 0$**, alors la suite** (u_n) **est de Cauchy.**

Chapitre 3

Les fonctions réelles à variables réelles : limites et continuité

Sommaire

1 Généralités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point) ou une réunion d'intervalles.

Définition 1.1. *On appelle fonction numérique sur I, toute application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. L'élément $y = f(x)$ est l'image de x par f. L'ensemble $f(\mathrm{I}) = \{f(x) \in \mathbb{R}/x \in \mathrm{I}\}$ est appelé l'image de I par f.*
On note par $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définie sur I.

Définition 1.2. *Soit f une fonction numérique.*
On appelle domaine de définition de f l'ensemble noté D_f des réels x tel que $f(x)$ soit définie, en général un D_f est un intervalle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3. - *Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$*
- *Si $f(x) = \ln(x - 1)$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 1\} =]1, +\infty[$*
- *Si $f(x) = \ln|x - 1|$ alors $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$*

1.1 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 1.3. *Soient f et g dans $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On peut alors définir les fonctions suivantes :*
- ***La somme de** f **et** g est l'application $(f + g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par :*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- ***La multiplication de** f **par un réel** α est l'application $(\alpha f) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- ***Le produit de** f **et** g est l'application $(fg) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définit par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

- ***La valeur absolue de** f est l'application $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |f|(x) = |f(x)|$$

- ***Maximum, Minimum de** f **et** g sont les deux applications $\sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ définient pour tout $x \in \mathrm{I}$, par*

$$\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x)), \text{ et } \inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x))$$

Proposition 1.1. *Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$. On a alors les relations suivantes :*

$$|f| = \sup(f, -f), \quad \sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

Remarque 1.1. *On définit les fonctions partie positive (resp négative) de f, notée f^+ (resp. f^-), par*

$$f^+ = \sup(f, 0), \quad f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$$

De plus on peut vérifie facilement que

$$\left\{\begin{array}{ll} f^+ & = \dfrac{|f|+f}{2} \\ f^- & = \dfrac{|f|-f}{2} \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{ll} f & = f^+ - f^- \\ |f| & = f^+ + f^- \end{array}\right.$$

Remarque 1.2. *On peut aussi étendre la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ à $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ en posant, pour $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$,*

$$f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leq g(x)$$

1.2 Fonctions bornées

Définition 1.4. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. On dit que f est :*

- ***Majorée** si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq M$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne supérieure de f et que l'on note : $\sup\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\sup\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.*
- ***Minorée** si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq m$. Dans ce cas l'ensemble $f(\mathrm{I})$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle borne inférieure de f et que l'on note : $\inf\limits_{\mathrm{I}} f$ ou encore $\inf\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$.*
- ***Bornée** si elle est majorée et minorée.*

En pratique ; il souvent plus facile d'utiliser le résultat ci-dessous pour monter qu'une fonction est bornée :

Proposition 1.2. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. f est bornée si et seulement si*

$$\exists A > 0;\ \forall x \in \mathrm{I}; \quad |f(x)| \leq A$$

Dans ce cas l'ensemble $\{|f(x)|; x \in \mathrm{I}\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup\limits_{\mathrm{I}} |f| = \|f\|_\infty$.

Proposition 1.3.

- *Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée (l'ensemble des fonctions bornées forme un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$).*
- *Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.*

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.5. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$*

- *La fonction f est dite **croissante** sur I si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad on\ a \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- *La fonction f est dite **décroissante** sur I si*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad on\ a \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *La fonction f est dite **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.*

Lorsque les inégalités sont strictes on parle de fonctions strictement croissante (resp. décroissante) ou strictement monotones.

Proposition 1.4.

- *Soient $f,\ g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$*

- *Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f+g$ est strictement croissante.*
- *Si f et g sont définies positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $f.g$ est croissante (resp. décroissante).*

– *Si $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ alors*
  - *Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $g \circ f$ est croissante.*
  - *Si g est croissante (resp. décroissante) et f est décroissantes (resp. croissante) alors $g\circ f$ est décroissante .*

Démonstration. **Supposons par exemple f croissante sur I et g décroissante sur J. Montrons que $g \circ f$ est décroissante. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{I}$ tels que $x_1 \leq x_2$. Comme f est croissante, $f(x_1) \leq f(x_2)$ et puisque g est décroissante, $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ et donc $g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$.** □

Exemple 4. 1. *Les fonctions* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

2. *La fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ *est strictement décroissante.*

3. *La fonction* $h : \left\{\begin{array}{ccc}]0,\dfrac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\tan(x)} \end{array}\right.$ *est strictement décroissante. En effet ; il suffit d'écrire $h = g\circ f$ avec*
   - $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *qui est strictement décroissante.*
   - $f : x \longmapsto x\tan(x)$ *qui est strictement croissante.*

4. *La fonction $|x| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. Mais elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

Théorème 1.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*
Si f est monotone sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée.

Démonstration. **Supposons que f est décroissante**
soit $x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b \iff f(b) \leq f(x) \leq f(a) \implies f$ **est bornée.**

Remarque 1.3. *Si f est monotone sur un intervalle ouvert, elle n'est pas nécessairement bornée.*

Exemple 5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *si $x \in]0,1]$, f est décroissante mais f n'est pas bornée.*

1.4 Fonctions paires et fonction impaires

On suppose f définie sur un domaine symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$). Si cette condition n'est pas verifiée, la parité est une notion creuse : inutile de perdre du temps en le precisant à chaque fois.

Définition 1.6. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$*
– *f est paire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = f(x)$. Dans ce cas la courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*
– *f est impaire si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I} : f(-x) = -f(x)$. Si c'est le cas, alors la courbe de f admet un centre de symétrie, l'origine du repère.*

Remarque 1.4. *Plus généralement, si $\forall x \in \mathrm{I}$, $2a - x \in \mathrm{I}$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$, alors la courbe de f admet le point $A(a,b)$ comme centre de symétrie.*

Exemple 6.
- *La fonction* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ *est paire. Son domaine de définition est* $]-\infty; 1] \cup [1; +\infty[$. *La fonction* $f(x) = x^3 - x$ *est impaire Son domaine de définition est* $\mathbb{R}$.
- *La fonction* $x \mapsto \cos(x)$ *est paire et la fonction* $x \mapsto \sin(x)$ *est impaire.*
- *La fonction* $x \mapsto \ln(x)$ *n'est ni paire ni impaire, son domaine de définition est* $]0, +\infty[$.
- *La fonction* $x \mapsto e^x$ *n'est ni paire ni impaire, pourtant son domaine de définition est* $\mathbb{R}$ *qui est symetrique.*

1.5 Fonctions périodiques

Définition 1.7. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. f *est dite périodique de période* T *si*

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathrm{I}/x+T \in \mathrm{I}.$$

Remarque 1.5.
- *Ainsi, si* T *est une période pour* f, *tous les nombres de la forme* $kT, \quad k \in \mathbb{Z}$, *sont aussi des périodes pour* f.
- *Si* f *est périodique, on appelle période fondamentale de* f *la plus petite période strictement positive si elle existe.*
- *L'ensemble des fonctions* T*-périodiques sur* $\mathbb{R}$ *est stable par combinaison linéaire et par produit. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
- *Pour construire le graphe d'une fonction* T*-périodique, il suffit de construire l'arc relatif à* $[\alpha, \alpha + T$, α *quelconque. Le reste se déduit par des translations parallèles à l'axe des abscisses.*

Exemple - La fonction $f(x) = x - E(x)$ **est 1-périodique**

2 Limites d'une fonction

Définition 2.1. ***Point adhérent***
Soit $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit qu'un réel* x *est adhérent à la partie* I *lorsque*

$$\forall \eta > 0 \quad \exists a \in \mathrm{I}, \text{ tel que } |x - a| \leq \eta$$

On note $\bar{\mathrm{I}}$ *l'ensemble des points adhérents de la partie* I.

Définition 2.2. ***Propriété vraie au voisinage d'un point***
Soient f *une fonction définie sur une partie* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \bar{\mathrm{I}}$
- *On dit que la fonction* f *est définie au voisinage du point* a *si et seulement s'il existe un voisinage* V_a *de* a *telle que* $V_a \subset \mathrm{I}$.
- *On dit que* f *vérifie la propriété* $(\mathcal{P})$ *au voisinage du point* a *si et seulement s'il existe un voisinage* $V_a \subset \mathrm{I}$ *de* a *tel que la restriction de* f *à* V_a *vérifie la propriété* $(\mathcal{P})$.

2.1 Valeurs limites en un point

Définition 2.3. *Soient* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$. *On dit que la fonction* f *admet pour limite le réel* ℓ *en* x_0 *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \text{ tel que } \quad (x \in \mathrm{I}, \ x \neq x_0, \ |x - x_0| < \eta) \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Le réel ℓ *est appelé limite de* f *en* x_0. *On note alors* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 2.1. *Comme pour les suites, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, la définition ne changera pas.*

Exemple 7. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. Nous allons montrer que f tend vers 1 quand x tend vers 1.*
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$ tel que si $|x-1| \leq \eta$ alors $|f(x) - 1| = 2|x-1| \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Proposition 2.1. ***(Définition de la limite à l'aide des voisinages)***
Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}_\ell, \quad \exists V \in \mathcal{V}_{x_0}, \quad f(V \cap \mathrm{I}) \subset W$$

Proposition 2.2. ***(Unicité de la limite)***
Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Démonstration. **Supposons f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0 et soit $\forall \varepsilon > 0$ alors on a, par définition :**

$$\exists \eta_1 > 0, \ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| < \eta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\exists \eta_2 > 0, \ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| < \eta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \textbf{tel que} \quad |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow \ |\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque alors $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$ comme ε est quelconque, ceci entraîne que $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, une fonction admettant une limite finie ℓ en $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Alors il existe un voisinage V du point x_0 sur lequel la fonction f est bornée.*

Démonstration. **Remarquons d'abord que d'après l'inégalité triangulaire, on a**

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$$

Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < 1$$

Posons $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\in \mathcal{V}_{x_0}$ et $A = |\ell| + 1$. Donc

$$\forall x \in V \cap \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leq 1 + \ell \Longrightarrow |f(x)| \leq A$$

Proposition 2.4. ***(Caractérisation séquentielle)***
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. **$\Rightarrow$). Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de I qui converge vers x_0. Nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers ℓ. Soit $\forall \varepsilon > 0$. Donc par**

définition :

$$\exists \eta > 0 \quad \textbf{tel que} \qquad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0$**, il existe un** $N \geq 0$**, tel que**

$$\forall n \geq N,\ |x_n - x_0| \leq \eta. \tag{2}$$

donc de (1) **et** (2)**, on obtient**

$$\forall n \geq N,\ |f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

$\Longleftarrow$) **Par absurde, supposons que** f **ne tend pas vers** ℓ **quand** x **tend vers** x_0**. La contraposée de la définition de la limite nous donne**

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ (\exists x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta) \quad \textbf{et} \quad |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq 1$**, en prenant** $\eta = \dfrac{1}{n}$**, il existera un réel** $x_n \in \mathrm{I}$ **et tel que** $|x_n - x_0| \leq \dfrac{1}{n}$ **et** $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$**. La suite** $(x_n)_{n \geq 1}$ **ainsi construite converge vers** x_0 **cependant,** ℓ **n'est pas limite de la suite** $(f(x_n)_{n \geq 1}$**.**

Remarque 2.2. *La prosition ci-dessus sert surtout à montrer que certains fonctions n'ont pas de limites.*

Exemple 8. 1. *La fonction* $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x})\ \forall x \in \mathbb{R}^*$ *n'admet pas de limite au point 0 :*
En effet, considérons les suites $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ *et* $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$*. Elles convergent toutes les deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et pourtant on a* $f(x_n) = 0$ *et* $f(y_n) = 1$*. Comme les deux limites sont différentes donc* f *n'admet pas de limite au point 0.*

2. *La fonction* $f(x) = E(x)$ *n'admet pas de limite au point* k *:*
En effet considérons les deux suites $x_n = k + \dfrac{1}{n}$ *et* $y_n = k - \dfrac{1}{n}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*. Elles convergent toutes les deux vers* k *lorsque* n *tend vers l'infini, et pourtant on a* $E(x_n) = k$ *et* $E(y_n) = k - 1$*. Comme les deux limites sont défférentes donc* f *n'admet pas de limite au point* k*.*

Proposition 2.5. *Pour que* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *admet une limite au point* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ *il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ (x, x' \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta, |x' - x_0| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Démonstration. $(\Longrightarrow)$ **Par définition.**
$(\Longleftarrow)$ **Soit** $\varepsilon > 0$**, il existe** $\eta > 0$ **tel que** $x, x' \in \mathrm{I}$**,** $|x - x_0| < \eta$ **et**

$$|x' - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Soit (x_n) **une suite de pointd de** I **qui tend vers** x_0**, alors il existe** $N > 0$ **tel que pour tout** $n > N$**,** $|x_n - x_0| < \eta$**.**
Il en résulte que si $p > N$ **et** $q > N$**,** $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$**. La suite** $(f(x_n))_n$ **est une suite de Cauchy et par suite elle converge.** $\square$

2.2 Limites infinies en un point

Définition 2.4. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

1. *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* x_0 *et on notera* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ *si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A)$.
   (b) *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *qui converge vers* x_0*, on a*
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty.$$
2. *On dit que* f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* x_0 *et on note* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ *si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\forall B \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) < B)$.
   (b) *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *qui converge vers* x_0*, on a*
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty.$$

2.3 Valeur limite d'une fonction à l'infini

Définition 2.5. 1. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *avec* $\mathrm{I} =]a, +\infty[$*. On dit que* f *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *et on note* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ *si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x > \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.
   (b) *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *qui diverge vers* $+\infty$*, on a*
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

2. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *avec* $\mathrm{I} =]-\infty, a[$*. On dira que* f *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *et on note* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ *si l'une des prriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}^-,\ \forall x \in \mathrm{I} \quad (x < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.
   (b) *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* I *qui diverge vers* $-\infty$*, on a*
   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Remarque 2.3. *En combinant les définitions 2.4 et 2.5, on peut facilement définir aussi les limites*
$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple 9. 1. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. Alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
2. $f(x) = \sin x$*. La limite en* $x \longrightarrow \pm\infty$ *n'existe pas. Idem pour* $\cos x$.
3. $f(x) = \dfrac{sinx}{x}$*. Alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{sinx}{x} = 0$.

4. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_nx^m}$. *Alors*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{a_m} \frac{x^n}{x^m}$$

   - *Si* $m = n$, *alors* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{a_m} = a$
   - *Si* $m > n$ *alors* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
   - *Si* $m < n$ *alors* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

2.4 Limites à droite et à gauche

Nous avons vu dans la section précédente que la notion de limite d'une fonction en un point x_0 est liée au comportement de la fonction quand on s'approche de x_0 par des suites qui convergent vers x_0. Si on ne considère que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $x_n \leq x_0$ (respectivement $x_n \geq x_0$) on dira qu'on approche x_0 à gauche (respectivement à droite). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2.6. 1. *On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \quad (x_0 < x < x_0 + \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

cette limite est dite limite à droite de f en x_0.
On note alors $\ell = \displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ *ou encore* $\ell = \displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} f(x)$

2. *On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \quad (x_0 - \eta < x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

cette limite est dite limite à gauche de f en x_0.
On note alors $\ell = \displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ *ou encore* $\ell = \displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} f(x)$

Proposition 2.6. *Soit $f : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Démonstration. Exercice

Remarque 2.4. *En combinant les définitions 2.4 et 2.6, on peut facilement définir aussi les limites*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple 10. 1. *Considérons la fonction définie par* $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. *Elle admet 1 comme limite à* *droite de 0 et -1 comme limite à gauche de 0. En effet,*

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

On déduit que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty, \\ \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \pm\infty. \end{aligned}$$

2.5 Propriétés des limites

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 2.7. *Soient* $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$ *et* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. *On suppose que* $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ *et* $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \ell_2$. *Alors :*

1. $\lim_{x\longrightarrow x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$,
2. $\lim_{x\longrightarrow x_0} (fg)(x) = \ell_1\ell_2$, *en particulier* $\lim_{x\longrightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha\ell_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x\longrightarrow x_0} |f| = |\ell_1|$.
4. *si* $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(x) \neq 0$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\ell_2}$.

Démonstration.

1. **Soit** $\varepsilon > 0$. **Puisque** $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$,

$$\exists \eta_1 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, **alors**

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. **Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$, **on a bien**

$$|(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2. **On commence par écrire**

$$|(fg)(x) - \ell_1\ell_2| = |f(x)\,[g(x) - \ell_2] + \ell_2[f(x) - \ell_1]| \leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1|$$

Soit $\varepsilon > 0$. **Comme** f **admet une limite finie au point** x_0, **elle est bornée sur un voisinage de**

x_0 **donc il existe** $\eta_3 > 0$ **et** $M > 0$ **tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leq \eta_3 \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Puisque $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$

$$\exists \eta_1 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$$

Puisque $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$**,**

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$**. Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$**, en remplaçant dans la majoration précédente,**

$$|(fg)(x) - \ell_1 \ell_2| \leq M \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} + |\ell_2| \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} = \varepsilon$$

3. **C'est facile à déduire de la minoration de l'inégalité triangulaire,**

$$|f(x)| - |\ell_1| \leq |f(x) - \ell_1|$$

4. **Soit** $\varepsilon > 0$**. Notons** $k = \frac{|\ell_2|}{2}$**. Puisque** $\ell_2 \neq 0$**,** $k < |\ell_2|$ **et comme** $|g(x)| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} |\ell_2|$**, il existe** $\eta_1 > 0$ **tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow k < |g(x)|.$$

d'autre part il

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I}, |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell_2| < k|\ell_2|\varepsilon$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$**. Soit** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x)||\ell_2|} < \varepsilon$$

□

On peut étendre le théorème précédent aux limites infinies. Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ **deux fonctions,** $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$**, éventuellement infini et un réel** α**. On suppose que** $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ **et** $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$**. Nous avons résumé dans les tableaux suivants les limites de la somme, produit et quotient des deux fonctions dans tous les cas de figure. Les cases vide correspondent à des « formes indéterminées » où l'on ne peut rien dire de général.**

– **Somme** $f + g$

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

– **Produit** fg

$\ell \backslash \ell'$	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}^{-*}$	$+\infty$	$\ell\ell'$	**0**	$\ell\ell'$	$-\infty$
$\{0\}$		**0**	**0**	**0**	
$\mathbb{R}^{+*}$	$-\infty$	$\ell\ell'$	**0**	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

– **Inverse** $\dfrac{1}{f}$

ℓ	$-\infty$	$\mathbb{R}^{-*}$	$\{0^-\}$	$\{0^+\}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$+\infty$
$\dfrac{1}{f}$	**0**	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{1}{\ell}$	**0**

Théorème 2.1. *(Théorème de composition des limites)*
Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ *et deux fonctions* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que* $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. *Soient* $a \in \bar{\mathrm{I}}$ *et* $b \in \bar{\mathrm{J}}$. *On suppose que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

Démonstration. **Écrivons la preuve dans le cas où** a **et** ℓ **sont finis.**
Soit $\varepsilon > 0$**.**
Puisque $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$**,**

$$\exists \alpha > 0 \textbf{ tel que } \forall y \in \mathrm{J},\ |y - b| \leq \alpha \Longrightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Puisque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$**,**

$$\exists \eta > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \alpha$$

Soit $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - a| \leq \eta$**. Comme** $y = f(x) \in \mathrm{J}$ **et que** $|f(x) - b| \leq \alpha$**, on a** $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$ **d'où** $|(g \circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon$**.** □

2.6 Limites et relation d'ordre

Proposition 2.8. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, *une fonction admettant une limite finie* ℓ *en* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. *On suppose qu'il existe* $c, c' \in \mathbb{R}$ *tels que* $c < \ell < c'$. *Alors il existe un voisinage* V *du point* x_0 *tel* $\forall x \in V \cap \mathrm{I}, \quad c \leq f(x) \leq c'$.

Démonstration. **Posons** $\varepsilon = \min(\ell - c, c' - \ell)$**. Puisque** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$**, il existe un voisinage** V **du point** x_0 **tel que** $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ **d'où si** $x \in V \cap \mathrm{I}$, $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ **ce qui donne d'une part** $f(x) \leq \ell + \varepsilon \leq \ell + (c' - \ell) \leq c'$ **et d'autre part** $f(x) \geq \ell - \varepsilon \geq c$ **ainsi** $c \leq f(x) \leq c'$**.** □

Théorème 2.2. *Soit une fonction* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, *un point* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ *(éventuellement infini) et* $c \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *et qu'il existe un voisinage* V *du point* x_0 *tel que* $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$, $c \leq f(x)$ *(resp.* $c < f(x)$*). Alors* $c \leq \ell$.

Démonstration. **Donnons la démonstration dans le cas où** x_0 **est** ℓ **sont finis. Supposons par l'absurde que** $\ell < c$ **et posons** $\varepsilon = c - \ell > 0$**. Puisque** $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$**, il existe** $\eta_1 > 0$ **tel que**

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme V **est un voisinage du point** x_0**, alors par définition, il existe** $\eta_2 > 0$ **tel que** $]x_0-\eta_2, x_0+\eta_2[\subset V$**. Posons** $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$**. Puisque** x_0 **est un point adhérent à** I**, il existe** $x \in \mathrm{I}$ **tel que** $|x - x_0| \leq \eta$ **ce qui donne d'une part**

$$|x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et d'autre part on aurra

$$|x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow x \in V \Longrightarrow c \leq f(x)$$

on vient de montrer qu'il existe $x \in \mathrm{I}$ **tel que**

$$c \leq f(x) < \ell + \varepsilon = \ell + (c - \ell) = c$$

ce qui est absurde. □

Corollaire 6. *Soient deux fonctions* $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathrm{I}$ *et* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1 \text{ et } g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$$

On suppose qu'il existe un voisinage V *du point* x_0 *tel que* $\forall x \in V \cap \mathrm{I}$*,* $f(x) \leq g(x)$ *(resp* $f(x) < g(x)$ *alors*

$$\ell_1 \leq \ell_2$$

Démonstration. **Posons** $h = g - f$ **. D'après les propriétés des limites,** $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2 - \ell_1$**. D'autre part, sur un voisinage de** x_0**, on a** $c = 0 \leq h(x)$**. D'après le théorème précédent,** $0 \leq \ell_2 - \ell_1$ **d'où** $\ell_1 \leq \ell_2$**.** □

Le principe des gendarmes est aussi valable pour les limites des fonctions.

Proposition 2.9. *(Le principe des gendarmes). Soient* f, g *et* h *des fonctions réelles, définies sur un voisinage* V *d'un point adhérent* $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$*.*

1. *Si pour tout* $x \in V$ *on a* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *alors*

$$\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \ell\right).$$

2. *Si pour tout* $x \in V$ *on a* $f(x) \leq g(x)$ *alors*
   (a) $\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty\right)$.
   (b) $\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty\right)$.

Démonstration.

1. **Écrivons la preuve dans le cas où** x_0 **est fini.**
   Soit $\varepsilon > 0$**. Puisque** $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$**,**

$$\exists \eta_1 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

   De même, puisque $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$**,**

$$\exists \eta_2 > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in \mathrm{I},\ |x - x_0| \leq \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Comme V est un voisinage du point x_0,

$$\exists \eta_3 > 0 \textbf{ tel que }]x_0 - \eta_3, x_0 + \eta_3[\subset V.$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$. Puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_1$, $\ell - \varepsilon \leq f(x)$. Puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_2$, $g(x) \leq \ell + \varepsilon$ et puisque $|x - x_0| \leq \eta \leq \eta_3$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. On a finalement

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$$

d'où $|h(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

2. **Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas des suites.** □

Proposition 2.10. *Soient f et g deux fonctions réelles. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$ et $g(x)$ est bornée, alors*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)g(x) = 0.$$

Exemple 11. *1. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$. En effet on a*

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2, \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 = \lim_{x \longrightarrow 0}(-x^2) = 0$$

on déduit, par le principe des gendarmes que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^4 + x^2 + 3}}{x^4}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On a $\sqrt{3} \leq \sqrt{2x^4 + x^2 + 3}$. En multipliant par $\dfrac{1}{x^4}$ qui est positif, on déduit que $\frac{\sqrt{3}}{x^4} \leq f(x)$, et puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{3}}{x^4} = +\infty$, on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

3. $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^6} \sin^2(x)$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^6} = 0$ et $\sin^2(x)$ est bornée alors

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0.$$

2.7 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.3. *Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $\mathrm{I} =]a, b[$. Si une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante (respectivement décroissante), alors il y a deux possibilités.*

1. *Si f est majorée, alors f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers b (resp a) et on a alors $\ell = \sup\limits_{\mathrm{I}} f$.*
2. *Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$ (resp $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$).*

De même,

1. *Si f est minorée, alors f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a (resp b) et on a alors $\ell = \inf\limits_{\mathrm{I}} f$.*
2. *Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ (resp $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} -\infty$) .*

Démonstration. **Posons $\mathcal{E} = \{f(x); x \in]a, b[\}$. La partie $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ est non vide. Étudions les deux cas.**

1. **Si la fonction f est majorée, alors la partie $\mathcal{E}$ est majorée et d'après la propriété de la borne supérieurs, elle possède une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons qu'alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$.**
   Soit $\varepsilon > 0$. D'après la de caractérisation de la borne supérieure, il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $\ell - \varepsilon < y \leq \ell$. Puisque $y \in \mathcal{E}$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $y = f(x_0)$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - b| \leq \eta$, on a $x_0 \leq x \leq b$. Puisque la fonction f est croissante, $f(x_0) \leq f(x)$ et comme ℓ est un majorant de $\mathcal{E}$, on a également $f(x) \leq \ell$. Finalement,

$$\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. **Si la fonction f n'est pas majorée, montrons que $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $A > 0$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $A < f(x_0)$. Posons $\eta = b - x_0 > 0$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - b| \leq \eta$. Puisque $x_0 \leq x$ et que f est croissante, on a $A < f(x_0) \leq f(x)$.** ■

3 Fonctions continues

Définition 3.1. *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$*

1. *On dit que la fonction f est <u>continue</u> au point x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, quand x tend vers x_0 pour tout $x \in \mathrm{I}$, ce qui s'écrit*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

   On peut formuler ceci de la façon suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0 \ \textit{tel que} \quad |x - x_0| \leq \eta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

2. *On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I. On notera $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de I.*

Exemple 12. 1. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 1$. Nous avons montrer que f tend vers $f(1) = 1$ quand x tend vers 1. Donc f est continue au point $x_0 = 1$.*

2. *Soit la fonction réelle f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\dfrac{1}{x}) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

   Au point $x_0 = 0$ on a

$$|f(x) - f(0)| = |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|.$$

   En prenant $\eta = \varepsilon$ on aura

$$|x| \leq \eta \quad \Longrightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

   Donc f est continue au point $x_0 = 0$.

3. *De même en appliquant directement la définition, on peut montrer facilement que la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_*^+$.*
4. *pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} x^2 = x_0^2$. Ceci montre que la fonction $f(x) = x^2$ est continue en en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.*

5. *En général toutes les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur domaine de définition :* x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x...

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.4.

Proposition 3.1. *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*
f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de I *telle que* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x_0$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Démonstration. **La démonstration est une conséquence immédiate du critère sequentiel.** □

Exemple 13.
1. *Nous avons vu que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite au point 0. Ceci montre que cette fonction n'est pas continue en 0.*
2. *La fonction $f(x) = E(x)$ n'admet pas de limite au point $k \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$.*

Définition 3.2. *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$*

1. *f est continue à droite en x_0 si* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
2. *f est continue à gauche en x_0 si* $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 2.6.

Proposition 3.2. *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 14. *Nous avons vu que la fonction définie par, $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$, admet 1 comme limite à droite en 0 et -1 comme limite à gauche en 0. Donc la fonction f n'est pas continue 0.*

3.1 Opération sur les fonctions continues

Théorème 3.1. *Soient f, $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si f et g sont des fonctions réelles continues en x_0 alors*

1. **les fonctions $|f|$, $sup(f, g)$, $inf(f, g)$, $f + g$, $f - g$ et αf sont continues en x_0,**
2. **si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage du point x_0 et est continue en x_0.**

Démonstration. **(1) est une conséquence directe des propriétés sur les limites.**
Vérifions (2). Puisque $|g(x_0)| \neq 0$ et que g est continue au point x_0, $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$ donc $|g(x)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |g(x_0)|$. Posons $k = \dfrac{|g(x_0)|}{2}$, on a $0 < k < |g(x_0)|$ donc il existe un voisinage V du point x_0 tel que $\forall x \in \mathrm{I} \cap V$, $0 < \dfrac{|g(x_0)|}{2} < |g(x)|$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur V. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est donc définie sur $\mathrm{I} \cap V$ et d'après les proriétés des limites, $(\dfrac{f}{g})(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{f}{g}(x_0)$.

Théorème 3.2. *(Continuité de la composée de deux applications)*
Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On suppose que f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

De manière générale, si f est continue sur I *et g est continue sur* J. *Alors $(g \circ f)$ est continue sur* I.

Démonstration. **C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1.** □

3.2 Prolongement par continuité

Définition 3.3. *On dit que f est <u>discontinue</u> en x_0 si f n'est pas continue en x_0.*

Exemple 15. *1. La fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. En effet, au point $x = 0$, la fonction f est continue à gauche, mais elle ne l'est pas à droite car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$.

2. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0 de plus $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \pm\infty$, d'où f n'est pas continue en 0.

Définition 3.4. *Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$ et qu'elle admet en ce point une limite $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par :*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I \backslash \{x_0\} \\ \ell & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

est continue au point x_0 et appelée <u>prolongement par continuité</u> de f au point x_0.

Exemple 16. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et la fonction $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

4 Les théorèmes fondamentaux

4.1 Continuité sur un segment

Une fonction f définie sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est continue sur $[a, b]$ signifie qu'elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a ($\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$) et à gauche en b ($\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = f(b)$).
Le théorème suivant est fondamental en analyse.

Théorème 4.1. *(Théorème du maximum) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue alors f est bornée et atteint ses bornes càd si*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

alors

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] / \ f(x_2) = m \ \textit{et} \ f(x_1) = M$$

Démonstration. **La preuve utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.**

- **Montrons, par l'absurde, que la fonction f est majorée : en supposant que la fonction f n'est pas majorée :**

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a,b], \ f(x) > M$$

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. En prenant $M = n$, il existe $x_n \in [a,b]$ vérifiant $f(x_n) > n$. On construit ainsi une suite de points (x_n) du segment $[a,b]$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, par passage à la limite dans les inégalités, $a \leq c \leq b$. Mais la fonction f est continue au point c donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$. On obtient une contradiction puisque $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- **Définissons la partie de $\mathbb{R}$, $F = \{f(x); x \in [a,b]\}$. Elle est non vide puisque $f(a) \in F$. De plus, elle est majorée puisqu'on a vu que f était majorée. Elle admet donc une borne supérieure, $M = \sup F = \sup\limits_{I} f$. Montrons que cette borne supérieure est atteinte. D'après la caractérisation de la borne supérieure,**

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in [a,b], \ \textbf{tel que} \ M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

Pour tout entier n non nul, en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

La suite (x_n) étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $x_1 \in [a,b]$. Puisque la fonction f est continue au point x_1, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_1)$. On a d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que $M \leq f(x_1) \leq M$ d'où $M = f(x_1)$.
- **Pour montrer que f possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est atteinte, on utilise les mêmes techniques.** □

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.2. *(TVI)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $c \in f\,(]a,b)\,[$, il existe un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = c$.

Remarque 4.1. *Attention le point x_0 n'est pas unique.*

Démonstration. **Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $f(a) \neq f(b)$. On peut supposer que $f(a) < f(b)$ et soit $c \in]f(a), f(b)[$.**

Soit A l'ensemble

$$A = \{x \in [a,b],\ f(x) \leq c\}.$$

On a clairement $a \in A$ et donc A est non vide et en plus A est majoré par b. D'après le théorème de la borne supérieure, A admet une borne supérieure.
Soit $x_0 = \sup A$. Donc il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tell que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ et donc $f(a_n) \leq c$ et puisque f est continue en x_0, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n) = f(x_0)$ d'où $f(x_0) \leq c$.
D'un autre côté, on a $x_0 < b$ car $c < f(b)$ et donc pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) > c$. Il en résulte alors que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \geq c$. Finalement, $f(x_0) = c$. □

Une variante du théorème des valeurs intermédiaires, qui permet de résoudre certaines équations numériques, est donnée par :

Théorème 4.3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si on a $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Attention là aussi le point x_0 n'est pas unique.

Exemple 17. *Nous allons montrer que l'équation $x^3 - 2x + 2 = 0$ admet une solution sur $]-2,1[$. On considère la fonction*

$$f(x) = x^3 - 2x + 2.$$

Cette fonction est continue sur $[-2,1]$ et $f(-2)f(1) = -2 < 0$. D'après le corollaire 4.3, il existe $x_0 \in]-2,1[$ tel que $f(x_0) = 0$. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine x_0 sur l'intervalle $]-2,1[$.

4.3 Application du TVI

Corollaire 7. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Démonstration. **On suppose que $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et que f est continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle de I. Nous allons montrer que $f(\mathrm{J})$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$. Cela revient à prouver que pour tout $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$, on a $[y_1, y_2] \subset f(\mathrm{J})$. Soit $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$. Il existe $x_1, x_2 \in \mathrm{J}$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit $y \in [y_1, y_2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $y \in f(\mathrm{J})$. On prouve ainsi que $[y_1, y_2] \subset f(\mathrm{J})$.** □

Corollaire 8. *L'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue est un segment et si $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ alors $f([a,b]) = [m, M]$.*

Démonstration. **Puisque M est un majorant de $f([a,b])$ et m un minorant de $f([a,b])$, on a $f([a,b]) \subset [m, M]$. Montrons que $[m, M] \subset f([a,b])$. Soit $y \in [m, M]$. Comme les bornes sont atteintes, il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tel que $M = f(x_1)$ et $m = f(x_2)$. Un segment est un intervalle, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $y \in [f(x_1), f(x_2)]$, il existe $x \in [x_1, x_2] \subset [a,b]$ tel que $y = f(x)$ ce qui montre que $y \in f([a,b])$.** □

4.4 Théorème de la bijection

Théorème 4.4. *Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue strictement monotone de même type de monotonie que f.*

Preuve. Supposons par exemple que f est strictement croissante. Montrons qu'alors f est injective. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$ par l'absurde. Si l'on avait $x \neq y$, on aurait $x < y$ ou $y < x$, mais alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. D'autre part le théorème des VI prouve que f est surjective. Ainsi f est une bijection de I sur J.
Soient $(X, Y) \in \mathrm{J}^2$ tels que $X < Y$. Notons $x = f^{-1}(X)$ et $y = f^{-1}(Y)$. Si l'on avait $y \leq x$, puisque f est croissante, on aurait $f(y) \leq f(x)$ et donc $Y \leq X$ ce qui est faux. On en déduit que $x < y$ donc que $f^{-1}(X) < f^{-1}(Y)$.
Nous allons montrer maintenant que $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue.
Soit $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{J}$ avec $x_0 \in \mathrm{I}$ et soit $(f(x_n))_{n \in N}$ une suite qui converge vers y_0. Nous allons montrer que la suite $(f^{-1}(f(x_n))_{n \in N} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(y_0) = x_0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \in \mathrm{I}$. Puisque f est continue et strictement croissante, d'après le théorème 4.1, on a

$$f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] = [y_1, y_2]$$

et $f(x_0) = y_0 \in [y_1, y_2]$. Puisque la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ converge vers y_0, il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $f(x_n) \in [y_1, y_2]$, soit $x_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, d'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0.$$

□

Remarque 4.2. *Soit f une fonction bijective sur* I. *Le graphe de f^{-1}, dans un repère orthonormé, se déduit de celui de f par une symétrie d'axe par rapport à la première bissectrice*

5 Fonctions uniformément continues

5.1 Fonctions Lipschitziennes

Définition 5.1.
- *Soit un réel $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On note $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I.
- *Si $0 \leq k < 1$, et f est k-lipschitzienne, on dit que f est contractante.*

Proposition 5.1.
1. *Une combinaison linéaire de deux fonctions lipschitzienne est encore lipschitzienne. Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.*
2. *La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne. Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{J})$ avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, alors $(g \circ f) \in \mathcal{L}(\mathrm{I})$.*
3. *Soit $c \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I} \cap]-\infty, c]$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I} \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2, alors elle est lipschitzienne sur* I.

Démonstration.

1. **Puisque f et g sont lipschitziennes sur I, il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k_1|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq k_2|x - y|$. Posons $k = |\alpha|k_1 + |\beta|k_2$. Soit**

$(x,y) \in \mathrm{I}^2$, **utilisons l'inégalité triangulaire**

$$|(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(y)| \leq |\alpha||f(x)-f(y)|+|\beta||g(x)-g(y)| \leq (|\alpha|k_1+|\beta|k_2)|x-y| = k|x-y|$$

2. **Comme** f **est lipschitzienne sur** I**, il existe** $k_1>0$ **tel que** $\forall(x,y)\in \mathrm{I}^2$, $|f(x)-f(y)| \leq k_1|x-y|$.
   Puisque g **est lipschitzienne sur** J**, il existe** $k_2>0$ **tel que** $\forall(X,Y)\in \mathrm{J}^2$, $|g(X)-g(Y)| \leq k_2|X-Y|$.
   Posons $k=k_1k_2$**. Soient** $(x,y)\in \mathrm{I}^2$**, puisque** $X=f(x)\in \mathrm{J}$ **et** $Y=f(y)\in \mathrm{J}$,

$$|g\circ f(x)-g\circ f(y)| = |g(X)-g(Y)| \leq k_2|X-Y| = k_2|f(x)-f(y)| \leq k_1k_2|x-y|$$

3. **Exercice.**

Théorème 5.1. ***(Théorème de point fixe)***
Soit f *une fonction contractante de rapport* k *sur un segment* $\mathrm{I}=[a,b]$ *tel que* $f(\mathrm{I})\subset \mathrm{I}$*. L'équation* $f(x)=x$ *admet une solution unique* α *dans* I.
On dit que α *est l'unique point fixe de* f.

Démonstration. **Il suffit d'appliquer le TVI à la fonction** $g(x)=f(x)-x$ **sur** $[a,b]$.

5.2 Continuité uniforme

Définition 5.2. *Soit une fonction* $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie sur un intervalle* I*. On dit qu'elle est uniformément continue sur* I *lorsque*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0:\ \forall(x,y)\in \mathrm{I}^2,\ |x-y|\leq\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$$

Le nombre η *est indépendant des réels* (x,y) *et s'appelle un module d'uniforme continuité.*

Proposition 5.2. *Soit une fonction* $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie sur un intervalle* I.

$$f \text{ Lipschitzienne sur } \mathrm{I} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur } \mathrm{I} \Longrightarrow f \text{ continue sur } \mathrm{I}$$

Démonstration.

- **Supposons** f **lispchitzienne sur** I**, il existe** $k>0$ **tel que** $\forall(x,y)\in \mathrm{I}^2$, $|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$.
  Montrons que f **est uniformément continue sur** I.
  Soit $\varepsilon>0$**. Posons** $\eta=\dfrac{\varepsilon}{k}>0$.
  Soient $(x,y)\in \mathrm{I}^2$ **tels que** $|x-y|\leq\eta$**, on a**

$$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|\leq k\eta=\varepsilon$$

- **Supposons** f **uniformément continue sur** I **et montrons que** f **est continue sur** I**. Soit** $a\in \mathrm{I}$**, montrons que la fonction** f **est continue au point** a.
  Soit $\varepsilon>0$**, Puisque** f **est uniformément continue sur** I**, il existe** $\eta>0$ **tel que**

$$\forall(x,y)\in \mathrm{I}^2,\ |x-y|\leq\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$$

  Soit $x\in \mathrm{I}$ **tel que** $|x-a|\leq\eta$**, on a bien** $|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$. □

Théorème 5.2. ***(Théorème de Heine)***
Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment

Démonstration. **Nous allons construire des suites et utiliser le théorème de Bolzano-Weirstrass. Nous devons montrer que**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que cette propriété est fausse :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \textbf{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in N^*$, **en prenant** $\eta = \dfrac{1}{n}$, **on peut trouver deux réels** $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ **vérifiant**

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \textbf{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

On construit ainsi deux suites (x_n) **et** (y_n) **de points du segment** $[a, b]$**. Puisque la suite** (x_n) **est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente,** $(x_{\varphi(n)})$ **vers une limite** $c \in [a, b]$**. Puisque**

$$|y_{\varphi(n)}) - c| \leq |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - c| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

la suite $(y_{\varphi(n)}))$ **converge également vers la même limite** c**. Puisque la fonction** f **est continue au point** c**, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité,** $f(x_{\varphi(n)})) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(c)$ **et** $f(y_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(c)$**. Mais comme** $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon < |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|$ **, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que** $0 < \varepsilon < |f(c) - f(c)| = 0$ **ce qui est absurde.** $\square$

Chapitre 4

Fonctions dérivables

Sommaire

La dérivée d'une fonction renseigne sur certaines particularités de son graphe. Elle permet d'identifier :

- **Pour quelles valeurs de son domaine de définition la courbe croît ou décroît ?**
- **Quels sont les extremums relatifs (locaux) de la fonction ?**

1 Dérivée en un point

Définition 1.1. *Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle* I *et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point x_0 si :*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas cette limite ℓ est appelée la dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$.

Remarque 1.1. *Si on prend $h = x - x_0$ on aura*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Exemple 18. *Les fonctions affines : $f(x) = ax + b$*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a$$

1.1 Interprétation géométrique

Soient $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \mathcal{C}_f$ et $M = (x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. La quantité, dite taux d'accroissement de f au voisinage de x_0

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

représente la pente de la droite (M_0M). Si ce quotient a une position limite quand $x \longrightarrow x_0,\ x \neq x_0$, alors cette limite $f'(x_0)$ est appelée le coefficient directeur (ou la pente) de la tangente en $(x_0, f(x_0))$, de plus l'équation de la tangente est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Si le taux de variations T_{f,x_0} de f au voisinage de x_0 tend vers $\pm\infty$, on dit que f admet une dérivée infinie et on note $f'(x_0) = \pm\infty$.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, au point x_0, est dite tangente verticale.

Exemple 19. *La fonction $f(x) = x^2$ et dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x$. Ainsi l'équation de la tangente de la courbe représentative de f au point $(1, 1)$ est $y = 1 + 2(x - 1)$.*

1.2 Dérivée à gauche, dérivée à droite

Définition 1.2. – *Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite en x_0 si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \quad \textit{existe.}$$

– *Une fonction* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable à gauche en* x_0 *si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) \quad \textit{existe.}$$

Proposition 1.1. *La fonction* f *est dérivable en* x_0 *si et seulement si* f *est dérivable à droite et à gauche de* x_0 *et on a* $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

2 Propriétés des fonctions dérivables

2.1 Continuité

Théorème 2.1. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

– *Si la fonction* f *est dérivable en un point* x_0 *alors* f *est continue en* x_0.

– *Si la fonction* f *est dérivable sur* I *alors* f *est continue sur* I.

On a donc $\quad \mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$

Démonstration. **Exercice.**

Remarque 2.1. *La réciproque n'est pas toujours vraie. En effet la fonction* $x \longrightarrow |x|$ *est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0 car*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

2.2 Extemum local d'une fonction

Définition 2.1. ***Extremum, Extremum local***

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$.

- *Extremum global*
  – *On dit que* f *admet un maximum (globale) en* a *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leq f(a)$. *Si c'est le cas, on pose* $f(a) = \max\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$.
  – *On dit que* f *admet un minimum (globale) en* a *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geq f(a)$. *Si c'est le cas, on pose* $f(a) = \min\limits_{x \in \mathrm{I}} f(x)$.
- *Extremum local*
  – *On dit que* f *admet un maximum local en* a *si et seulement si* $\exists V$, *voisinage de* a, *tel que* $\forall x \in V,\ f(x) \leq f(a)$.
  – *On dit que* f *admet un minimum local en* a *si et seulement si* $\exists V$, *voisinage de* a, *tel que* $\forall x \in V,\ f(x) \geq f(a)$.
- *On dit que* f *admet un extremum (respectivement un extremum local) si* f *admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).*

Proposition 2.1. *Soit* I *un intervalle ouvert. Si* f *admet un extemum local au point* x_0 *et si* f *est dérivable en* x_0 *alors* $f'(x_0) = 0$. *Dans ce cas,* x_0 *est appelé un point critique de* f.

Démonstration. **On suppose par exemple que** x_0 **est un maximum. Si** f **est dérivable en** x_0 **alors on a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

or on a $\quad f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x > x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

et on a $\quad f'_g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0, x < x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$

ce qui donne

$$f'(x_0) = 0.$$

Remarque 2.2. – *La réciproque est fause. Par exemple la fonction* $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^3$ *vérifie* $f'(0) = 0$ *mais n'admet pas d'exetremum au point 0.*

– *L'existence d'un extremum (maximum ou minimum) local n'entraîne pas forcément la dérivabilité de* f *en ce point. En effet la fonction* $f(x) = |x|$ *admet un minimum en 0, alors que* f *n'est pas dérivable en 0.*

Exemple 20. *La fonction* $f(x) = x^2$ *est dérivable en tout point* $x \in \mathbb{R}$ *et* $f'(x) = 2x$. f *admet un minimum au point* 0 *ainsi* $f'(0) = 0$.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

On dit que f **est dérivable sur l'intervalle** I **si elle est dérivable en tout point de** I**. On notera** $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ **l'ensemble des fonctions dérivable en tout point de** I**. On a bien**

$$\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$$

Proposition 3.1. *Soient* $f, g \in \mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$*. Alors* $(f+g), (\alpha f)(\alpha \in \mathbb{R}), (f.g)$ *et* $(\dfrac{1}{f})(f \neq 0)$*, sont des fonctions dérivables sur* I *et on a*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $(\dfrac{1}{f})'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Démonstration.

1. **On a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

ce qui montre la première formule.

2. **On a**

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha f'(x_0),$$

ce qui montre la deuxième formule.

3. **On a**

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

   et donc

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   et puisque f **est continue en** x_0 **on a** $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ **et donc**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$

   ce qui montre la troisième formule.

4. **On a,**

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{(x-x_0)f(x_0)f(x)}\\ &= -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.\end{aligned}$$

   Noter qu'on a utilisé encore le fait que f **est continue en** x_0 **et donc** $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$**, ce qui montre la quatrième formule.**

5. **La formule**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

   est un résultat des formules 3 **et** 4**.**

Théorème 3.1. *Soient* $f\in\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ *et* $g\in\mathcal{F}(\mathrm{J},\mathbb{R})$ *deux fonctions et soit* $x_0\in\mathrm{I}$ *tel que* $f(x_0)\in\mathrm{J}$*. Si* f *est dérivable en* x_0 *et* g *en* $f(x_0)$ *alors* $g\circ f$ *est dérivable en* x_0 *et on a*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration. **On a** f **est dérivable en** x_0 **donc**

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

et on a g **est dérivable en** $f(x_0)$ **donc**

$$\lim_{y\longrightarrow f(x_0)}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}=g'(f(x_0)).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

puisque lorsque $x\longrightarrow x_0$, $f(x)\longrightarrow f(x_0)$ (f étant continue en x_0), on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g'(f(x_0)),$$

ce qui montre la formule souhaitée.

Théorème 3.2. *Soit f une fonction définie et continue sur I et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en un point $x_0\in\mathrm{I}$ et $f'(x_0)\neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable au point $y_0=f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Démonstration. **f est continue et strictement monotone sur I donc f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone aussi. On a**

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}}.$$

Lorsque $y\longrightarrow y_0$, $x\longrightarrow x_0$ (f^{-1} étant continue en y_0) et puisque f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)\neq 0$, et il en résulte que

$$\lim_{y\longrightarrow y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

4 Théorèmes fondamentaux

4.1 Théorème de Rolle

Théorème 4.1. *Soit $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors, il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Démonstration. **f est continue sur $[a,b]$ donc d'après le théorème de maximum f est bornée et atteint ses bornes donc**

$$\exists c_1,c_2\in[a,b]/\ f(c_1)=m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\ \textbf{et}\ f(c_2)=M=\sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

- **Si $m=M$, le minimum coïncide avec le maximum et donc f est constante sur $[a,b]$ et par suite pour tout $c\in]a,b[$, $f'(c)=0$.**
- **Si $m\neq M$, la fonction f atteint son minimum en c_1,**

- **si** $m = f(a) = f(b)$**, comme** f **atteint son maximum en** c_2 **et** $m \neq M$**, alors** $c_2 \in]a, b[$ **et** $f'(c_2) = 0$ **d'après la proposition 2.1.**
- **sinon,** $c_1 \in]a, b[$ **et** $f'(c_1) = 0$ **d'après la proposition 2.1.**

4.2 Théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est une généralisation du théorème de Rolle.

Théorème 4.2. *Soit* $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. Alors il existe au moins un point* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Démonstration. **On considère la fonction** φ **définie par**

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

φ **est définie et continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$ **de plus** $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$**, donc d'après le théorème de Rolle, il existe** $c \in]a, b[$ **tel que** $\varphi'(c) = 0$**. Or**

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$\varphi'(c) = 0$ **donc** $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Exemple 21. 1. *Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que*

$$\frac{1}{3} < \ln(1,5) < \frac{1}{2}$$

On a $\ln(1,5) = \ln(\frac{3}{2}) = \ln(3) - \ln(2)$*. Soit* $2 < x < 3$*, la fonction* $\ln$ *est continue sur* $[2, 3]$*, dérivable sur* $]2, 3[$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un* $c \in]2, 3[$ *tel que*

$$\frac{\ln(3) - \ln(2)}{3 - 2} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

or $c \in]2, 3[$ *donc* $\frac{1}{3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$ *d'où le résultat souhaité.*

2. *Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Soit $0 < x < 1$*. La fonction* e^x *est continue sur* $[\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}]$ *et est dérivable sur* $]\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}[$*. D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c(x) \in]\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}[$ *tel que*

$$e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{c(x)} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{(1 - x)e^{c(x)}}{x^2}.$$

On aura alors

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = (1 - x)e^{c(x)}.$$

Puisque $\frac{1}{x} < c(x) < \frac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{c(x)} = +\infty$ *et donc*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty.$$

4.3 Application du TAF : Variations d'une fonction

Proposition 4.1. *(Variations d'une fonction)*
Soit I *un intervalle ouvert et* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *une fonction continue et dérivable sur* I. *Alors :*

1. *La fonction* f *est croissante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geq 0$.
2. *La fonction* f *est décroissante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \leq 0$.
3. *La fonction* f *est constante sur* I *si et seulement si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

Démonstration.

1. **Supposons que la fonction f est croissante et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Pour tout x distinct de x_0, on a**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \geq 0.$$

Supposons que la dérivée de f est positive dans l'intervalle I. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ avec $x \leq y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in]x, y[$ tel que

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

et donc $f(y) \geq f(x)$. Ceci montre que f est croissante sur I.

2. **Supposons que la fonction f est décroissante et soit $x_0 \in I$. Pour tout x distinct de x_0, on a**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ et donc } f'(x_0) \leq 0.$$

Supposons que la dérivée de f est négative dans l'intervalle I. Soient $x, y \in \mathrm{I}$ avec $x \leq y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in]x, y[$ tel que

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

et donc $f(y) \leq f(x)$. Ceci montre que f est décroissante sur I.

3. **Nous avons vu que si f est constante sur I alors f' est nulle sur I. Supposons maintenant que f' est nulle en tout point intérieur de I. Fixons $x \in \mathrm{I}$ et soit $y \in \mathrm{I}$. Si $x < y$, appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$, il existe $x_0 \in]x, y[$ tel que**

$$f'(x_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$$

et donc $f(y) = f(x)$. Si $y < x$, on montre de la même manière que $f(x) = f(y)$. □

Remarque 4.1. *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *une fonction continue et dérivable sur* I.

1. *Si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) > 0$ *alors la fonction* f *est strictement croissante sur* I.
2. *Si* $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) < 0$ *alors la fonction* f *est strictement décroissante sur* I.

La réciproque est fausse. En effet, $f(x) = x^3$ est strictement croissante mais $f'(x) = 3x^2$ s'annulle au point 0.

4.4 Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème 4.3. *Soit $f, g \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. **On considère la fonction φ définie par**

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g'(c)) = 0 \;\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

d'où le résultat.

Exemple 22. *1. En utilisant le théorème des accroissements finis généralisé, nous allons calculer la limite*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2 - 1}{x^4}.$$

En effet

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2 - 1}{x^4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cosx^2 - cos0^2}{x^4 - 0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-2x\sin x^2}{4x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

4.5 Application du TAF généralisé : La règle de l'Hôpital

Comme conséquence du théorème des accroissements finis généralisé, on obtient la règle de l'Hôpital qui s'énonce ainsi :

Proposition 4.2. ***(La règle de l'Hôpital en un point)***
Soient f, g deux fonctions continues sur $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ et dérivables sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[/\{x_0\}$ tel que pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[/\{x_0\}$ $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \infty$ alors

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Démonstration. **Pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, (sans perdre de généralité on peut supposer que $x > x_0$), f et g sont donc continues sur $[x_0, x]$ dérivables sur $]x_0, x[$ et d'après le théorème des accroissements finis généralisé il existe un $c(x) \in]x_0, x[$ tel que**

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

puisque $c(x)\in]x_0,x[$ alors, lorsque $x\longrightarrow x_0$, $c(x)\longrightarrow x_0$, il en résulte que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=\lim_{c(x)\longrightarrow x_0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=\ell.\square$$

Proposition 4.3. ***(Régle de l'Hôpital à l'infini)*** *Si f,g dérivables sur $]a,+\infty[$ (rep.$]-\infty,a[$) $(a>0)$ tel que $g'(x)\neq 0$. On suppose en outre que $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}f(x)=\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}g(x)=0(ou\ \infty)$ alors*

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\in\overline{\mathbb{R}}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\longrightarrow\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell.$$

Exemple 23. *En utilisant la règle de l'Hôpital, nous allons calculer la limite*

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Posons $f(x)=x\ln x-(x-1)$ et $g(x)=(x-1)^2$. Ces deux fonctions satisfont les hypothèses de la proposition 4.2 et donc

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

4.6 Inégalité des accroissements finis

Corollaire 9. *Soit $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si f' est bornée sur $]a,b[$, c'est-à-dire, qu'il existe $M>0$ tel que, pour tout $x\in]a,b[$, $|f'(x)|\leq M$, alors, pour tout $x,y\in[a,b]$,*

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

Démonstration. **Soient $x,y\in[a,b]$ avec $x<y$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$, il existe $c\in]x,y[$ tel que**

$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y).$$

On déduit alors que

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|\leq M|x-y|.$$

$\square$

Exemple 24. *1. Montrer que :*

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad\left|\frac{x}{1+x^2}-\frac{y}{1+y^2}\right|\leq|x-y|.$$

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(t)=\frac{t}{1+t^2}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$f'(t)=\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|1 - t^2| \leq 1 + t^2 \leq (1 + t^2)^2$$

et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f'(t)| \leq 1.$$

Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq |x - y|.$$

2. *Montrer que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$g(t) = \arctan t.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et on a, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$|g'(t)| = \frac{1}{(1+t^2)} \leq 1.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

4.7 Application de l'inégalité des accroissements finis

Théorème 4.4. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* $[a, b]$ *à valeurs dans* $[a, b]$. *On suppose que* f *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Si de plus, il existe* $K > 0$ *telle que*

$$|f'(x)| \leq K, \quad \forall x \in]a, b[$$

alors f *est* K*-lipschitzienne sur l'intervalle* $[a, b]$.

Démonstration. **Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis avec** $M = K$. □

Chapitre 5

Les fonctions usuelles

Sommaire

1 Fonctions circulaires réciproques

1.1 Fonction arcsinus

✓ **La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.**

✓ **Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.**

✓ **Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée** arcsin**, est définie par**

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

✓ **Ainsi la fonction** arcsin **est continue et strictement croissante sur** $[-1, 1]$**. De plus, on a**

$$y = \sin(x),\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow x = \arcsin(y),\ \ y \in [-1, 1]$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} &\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x \\ &\forall y \in [-1, 1], \qquad \sin(\arcsin y) = y \end{aligned}$$

Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**. Par exemple,**

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi.$$

✓ **Comme la fonction sinus est dérivable sur** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **alors la fonction arcsinus est dérivable sur** $]-1, 1[$ **et on a,** $\mathbb{S}$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ \ \forall x \in]-1, 1[.$$

En effet, si on pose $f(x) = \sin(x)$ **alors** $\forall x \in]-1, 1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

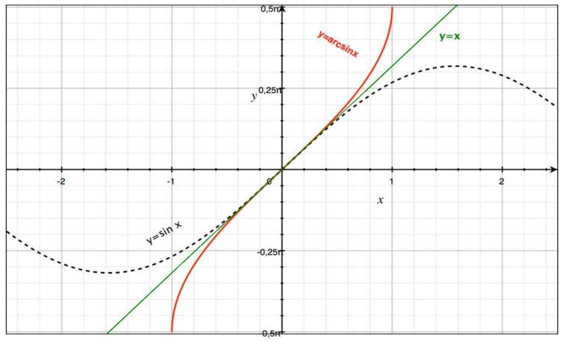
or on sait que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$$

comme la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ **est positive sur** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **alors**

$$\Longrightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

✓ **Le graphe de Arcsinus s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de la restriction à** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **de la fonction sinus**



1.2 Fonction arccosinus

✓ **La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π.**

✓ **Sa restriction sur $[0, \pi]$ est une fonction $\mathbb{S}$continue et strictement décroissante et prend ses valeurs sur [-1,1].**

✓ **Donc la fonction $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arccosinus et notée**

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

✓ **Ainsi la fonction $\arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.**

De plus, on a $\mathbb{S}$

$$y = \cos(x), \;\; x \in [0, \pi] \Longleftrightarrow x = \arccos(y), \;\; y \in [-1, 1]$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0, \pi], \qquad && \arccos(\cos x) = x \\ &\forall y \in [-1, 1], \qquad && \cos(\arccos y) = y \end{aligned}$$

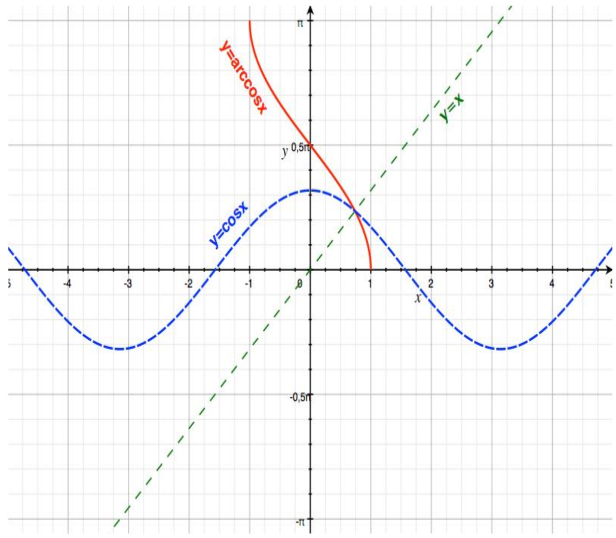
Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in [0, \pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi.$$

✓ **Comme la fonction $f(x) = cos(x)$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $]0, \pi[$ alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a,**

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

✓ **Le graphe de Arccosinus s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cosinus**

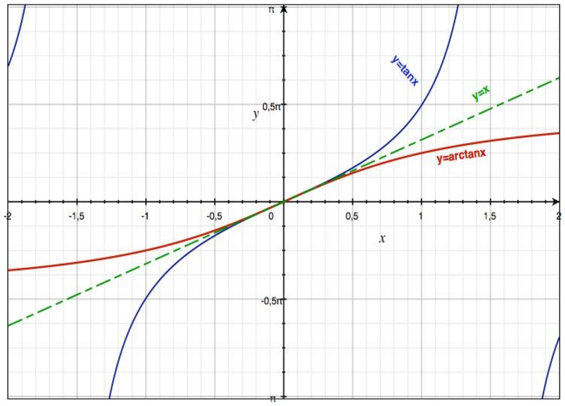


1.3 Fonction arctangente

- ✓ **La fonction tangente est définie sur** $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$**. Elle est continue, impaire et** π**-périodique.**
- ✓ **Sa restriction sur** $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ **est une fonction** $\mathbb{S}$**continue et strictement croissante et prend ses valeurs sur** $\mathbb{R}$**.**
- ✓ **Donc la fonction** $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ **est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arctangente et notée**
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
- ✓ **Ainsi la fonction** $\arctan$ **est continue et strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

De plus, on a
$$y = \tan(x), \ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow x = \arctan(y), \ \ y \in \mathbb{R}$$
D'où pour tout $y \in \mathbb{R}$
$$\tan(\arctan y) = y.$$
et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$**,**
$$\arctan(\tan x) = x.$$

- ✓ **Comme la fonction** $f(x) = \tan(x)$ **est dérivable sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **alors sa fonction réciproque** $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ **est dérivables sur** $\mathbb{R}$ **et on a pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,**
$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



Propriété 3.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [-1,1]; \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \\
&\forall x \in [-1,1]; \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \\
&\forall x \in]0,+\infty[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\
&\forall x \in]-\infty,0[; \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2}
\end{aligned}$$

***Démonstration.*. On montre la troisième propriété, les autres se montrent de la même manière. On pose**

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$$

On a f continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de plus

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = c$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve

$$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle sinus hyperbolique de x le réel noté $\sinh x$ et défini par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle cosinus hyperbolique de x le réel noté $\cosh x$ et défini par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- **La fonction** $\sinh$ **est impaire et la fonction** $\cosh$ **est paire. Elles sont liées par les relations :** $\forall x \in \mathbb{R}$

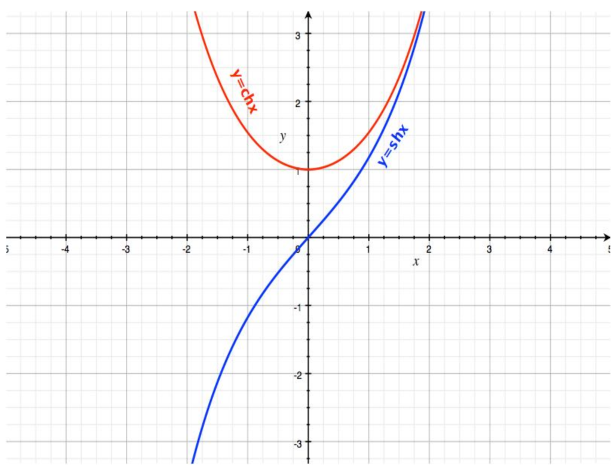
$$ch(x) + sh(x) = e^x \quad \textbf{et} \quad ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- **Les fonctions** $\cosh$ **et** $\sinh$ **sont dérivables sur** $\mathbb{R}$ **avec, pour tout** $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

- **La fonction** $\sinh$ **est impaire, strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**, strictement négative sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et strictement positive sur** $\mathbb{R}_+^*$ **et s'annule en 0.**
- **La fonction** $\cosh$ **est paire, strictement positive sur** $\mathbb{R}$**, strictement décroissante sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+^*$ **. De plus,** $\forall x \in \mathbb{R}, chx \geq 1$**.**



2.2 La fonction tangente hyperbolique

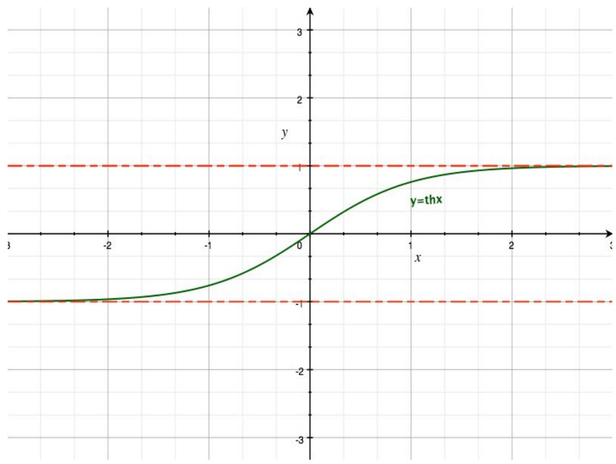
On appelle tangente hyperbolique de x **le réel noté** $\tanh x$ **ou** thx **et défini par**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La fonction th **est impaire, continue et dérivable sur** $\mathbb{R}$ **de plus on a,** $\mathbb{S}$

$$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, th **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **et s'annule en 0. Elle admet en** $\pm\infty$ **une asymptote horizontale d'équation** $y = \pm 1$**.**



2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$**,**

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cos x \sinh y, \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y, \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y, \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \\
\tanh(x-y) &= \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}.
\end{aligned}$$

On peut déduire que

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1, \\
\sinh(2x) &= 2\cosh x \sinh x.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh(2x)}{2} \quad \textbf{et} \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}.$$

De même,

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.$$

***Démonstration.*. On va montrer la première formule. En effet, on a par définition :**

$$\sinh x \cosh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} + e^{x-y} - e^{y-x}}{4}$$

de même

$$\cosh x \sinh y = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} - e^{x-y} + e^{y-x}}{4}$$

En sommant, on obtient

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \sinh(x+y)$$

$\square$

Les formules ci-dessous, dites formules de changement de variables, sont trés utiles dans le calcul intégral. Si on pose $t = \tanh \frac{x}{2}$**, on a**

$$\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \textbf{et} \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

3 Fonctions hyperboliques réciproques

3.1 La fonction argument sinus hyperbolique

✓ **La fonction** $\sinh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **vers** $\mathbb{R}$**. Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée** $\arg\sinh$**. On a donc**

$$x = \arg\sinh(y) \Longleftrightarrow y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

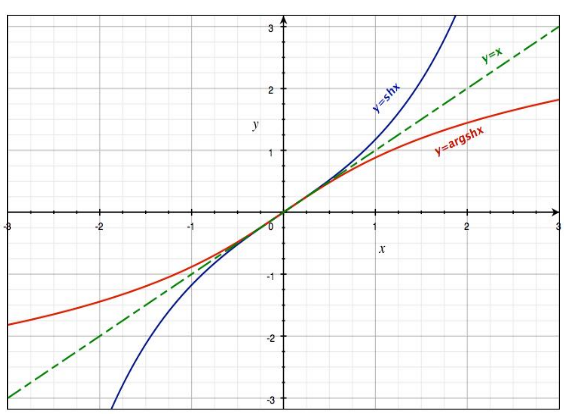
✓ **La fonction** $\sinh$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\mathbb{R}$ **alors sa fonction réciproque** $\arg\sinh x$ **est aussi dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et on a**

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, si on note $f(x) = \sinh(x)$ **alors**

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)}$$

or $\cosh^2(\arg\sinh x) - \sinh^2(\arg\sinh x) = 1 \Longrightarrow \cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{1+x^2}$



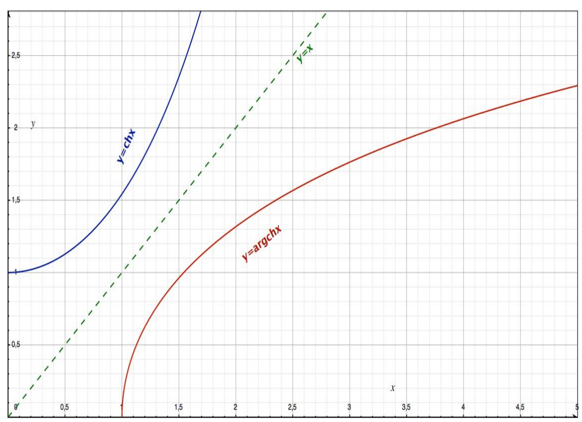
3.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

✓ **La fonction** $\cosh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $[0, +\infty[$ **vers** $[1, +\infty[$**. Sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée** $\arg\cosh$**. On a donc**

$$x = \arg\cosh(y), \;\; \forall y \in [1, +\infty[\Longleftrightarrow y = \cosh(x), \forall x \in [0, +\infty[$$

✓ **La fonction** $\cosh$ **est dérivable sur** $[0, +\infty[$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $]0, +\infty[$ **; alors sa fonction réciproque** $\arg\cosh x$ **est dérivable sur** $]1, +\infty[$ **et on a**

$$(\arg\cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \in]1, +\infty[$$



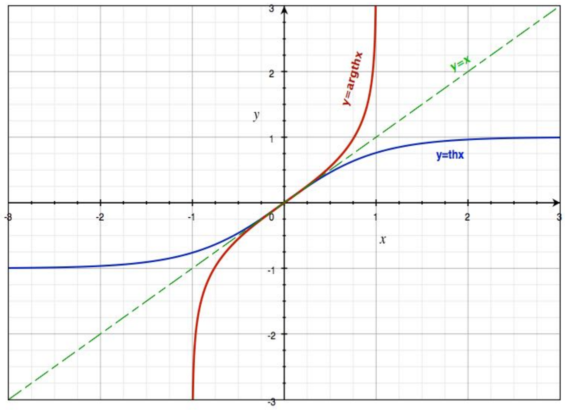
3.3 La fonction argument tangente hyperbolique

✓ **La fonction** $\tanh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **vers** $]-1, 1[$**. Sa bijection réciproque, appelée argument tangente hyperbolique et notée** $\arg\tanh$**. On a donc**

$$x = \arg\tanh(y), \;\; \forall y \in]-1, 1[\Longleftrightarrow y = \tanh(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

✓ **La fonction** $\tanh$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\mathbb{R}$ **alors sa fonction réciproque** $\arg\tanh$ **est dérivable sur** $]-1, 1[$ **et on a**

$$(\arg\tanh)'(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$



3.4 Expressions logarithmiques

Les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide d'expressions logarithmiques. Plus précisément, nous avons :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$**,**

$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Vérifions par exemple la deuxième égalité :
Soit $x \in [1, +\infty[$**. Posons** $t = \arg\cosh x$**. On a** $x = \cosh t$ **et** $t \geq 0$**. Il en résulte que** $\sinh t = \sqrt{x^2-1}$**. Par conséquent,**

$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2-1} \quad \textbf{et} \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$